Теория вероятностей

- *Случайный эксперимент (опыт, испытание)* – некоторое действие, результат которого заранее неизвестен. Предполагаемые результаты случайного эксперимента называются *случайными событиями,* или *случайными исходами* (слово “случайный” часто опускают). Примеры случайного эксперимента и события: бросание игрального кубика и «выпадение четного числа»; три подбрасывания монеты и «орел выпал хотя бы раз»; вытягивание двух игральных карт из колоды и «первая карта числовая, вторая картинка».

- *Достоверное* – событие, которое точно произойдет в результате эксперимента (например, «выпадение орла или решки» при одиночном подбрасывании монеты).

- *Невозможное* – событие, которое точно не произойдет (например, «выпавшее при бросании кубика число одновременно четно и нечетно»).

- *Вероятное* – событие, которое может произойти (в основном, о таких событиях и идет речь в задачах).

- Два события называются *совместными*/*несовместными*, если они *могут*/*не могут* наступить одновременно.

Примеры совместных событий: «выпало четное число» и «выпало простое число» при бросании кубика; «решка выпала ровно один раз» и «орел выпал менее двух раз» при подбрасывании двух монет; «вытянуты две картинки» и «вытянуты две пиковые карты» при вытягивании двух карт из колоды.

Примеры несовместных событий: «выпало четное число» и «выпало нечетное число» при бросании кубика; «решка выпала ровно один раз» и «орел не выпал ни разу» при подбрасывании двух монет; «вытянуты две числовые карты» и «одна из вытянутых карт – дама» при вытягивании двух карт из колоды.

- Два события называются *зависимыми*/*независимыми*, если наступление одного из них *меняет*/*не меняет* вероятность наступления другого.

Примеры зависимых событий: «на кубике выпало четное число» и «на кубике выпало составное число» при одиночном бросании кубика; «наличие некоторого заболевания у пациента» и «анализ на данное заболевание положительный»; «первая вытянутая карта пиковая» и «вторая вытянутая карта червовая» при последовательном вытягивании двух карт из колоды.

Примеры независимых событий: исходы первого и второго подбрасывания монеты; исходы вытягивания по одной карте из двух колод.

- *Противоположное* по отношению к A – событие, заключающееся в том, что в результате эксперимента A не произошло; обозначается $\overline{A}$. При этом событие A является противоположным к событию $\overline{A}$.

Примеры противоположных событий: «выпало простое число» и «выпало составное число или 1» при одиночном бросании кубика; «орел выпал ровно два раз» и «орел выпал менее двух раз» при подбрасывании двух монет; «вытянута числовая карта» и «вытянута картинка» при вытягивании одной карты из колоды.

- *Сумма* или *объединение* событий A и B – событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A и B; обозначается $A+B$ или $A \cup B$. Суммой событий «выпало нечетное число» и «выпало простое число» при одиночном бросании кубика будет событие «выпало одно из чисел 1, 2, 3, 5»; суммой событий «орел выпал хотя бы раз» и «орел выпал ровно один раз» при подбрасывании двух монет будет «орел выпал хотя бы раз».

- *Произведение* или *пересечение* событий A и B – событие, состоящее в одновременном наступлении каждого из событий A и B; обозначается $A \cdot B$ или $A \cap B$. Произведением событий «выпало нечетное число» и «выпало простое число» при одиночном бросании кубика будет событие «выпало одно из чисел 3, 5»; произведением событий «орел выпал хотя бы раз» и «решка выпала хотя бы раз» при подбрасывании двух монет будет «один раз выпал орел, один раз выпала решка».

- *Полная группа событий* – множество попарно несовместных событий, объединение которых есть достоверное событие. Примеры групп событий: «выпало простое число», «выпало составное число», «выпало число 1» при одиночном бросании кубика; «орел не выпал», «орел выпал один раз», «орел выпал два раза» при двух подбрасываниях монеты. Событие A и противоположное ему событие $\overline{A}$ всегда образуют полную группу событий.

- *Элементарным исходом* случайного эксперимента называется событие, которое невозможно представить в виде суммы несовместных событий.

- *Пространством элементарных исходов* называется множество всех элементарных исходов. Пространство элементарных исходов образует полную группу событий. Любое событие является суммой некоторых элементарных исходов (их называют *благоприятными исходами* и говорят, что эти исходы *благоприятствуют* наступлению данного события) и может быть рассмотрено как подмножество пространства элементарных исходов.

- Пространство элементарных исходов называется *дискретным*, если число элементарных исходов конечно или счетно.

- В таблице ниже приведено еще несколько примеров некоторых введенных понятий.

Случайный эксперимент	Бросание игрального кубика	Бросание двух монет	Вытягивание одной из 36 карт колоды
Пространство элементарных исходов	«Выпало число 1»; «2»; «3»; «4»; «5»; «6». 6 элементарных исходов	«ОО»; «ОР»; «РО»; «РР». 4 элементарных исхода	«Вытянута шестерка червей»; «семерка червей»; … ; «туз пикей». 36 элементарных исходов
Примеры неэлементарных исходов	«Выпало четное число»; «выпало число больше трех»	«Орел выпал один раз»; «решка выпала не более одного раза»	«Вытянута бубновая масть»; «вытянут валет»
Примеры совместных событий	«Выпало нечетное число» и «выпало простое число»	«Орел выпал хотя бы раз» и «решка выпала менее двух раз»	«Вытянут туз» и «вытянута трефовая масть»
Примеры несовместных событий	«Выпало простое число» и «выпало четное число, большее двух»	«Орел выпал не более одного раза» и «решка не выпала ни разу»	«Вытянута числовая карта» и «вытянута картинка»
Примеры противоположных событий	«Выпало число 3» и «выпало одно из чисел 1, 2, 4, 5, 6»	«Решка не выпала ни разу» и «решка выпала хотя бы раз»	«Вытянута тройка пик» и «вытянута любая карта, кроме тройки пик»

В случае, если нет оснований полагать, что какой-либо элементарный исход при многократном проведении эксперимента будет происходить чаще или реже, чем остальные, то такие элементарные исходы называют *равновероятными*. Математически равновероятность не определяется – она следует из реального эксперимента (можно много раз подбросить монету и увидеть, что количества исходов «выпал орел» и «выпала решка» примерно равные, причем чем больше проделано испытаний, тем ближе соотношение исходов будет к 1:1) или из свойств симметрии изучаемых явлений (монета достаточно симметрична и экспериментатор не старается выкинуть ее определенной стороной, колода карт хорошо перемешана и т.п.).

Пространство элементарных исходов называется *дискретным*, если число элементарных исходов конечно или счетно.

Классическое определение вероятности:

Вероятностью события A случайного эксперимента с дискретным пространством равновероятных элементарных исходов называется отношение числа элементарных исходов n, благоприятствующих событию A, к общему числу элементарных исходов N:

$$P(A) = \frac{n}{N}.$$

Вероятность элементарного исхода равна $\frac{1}{N}$. Вероятность невозможного события равна нулю, достоверного – единице. Вероятность произведения несовместных событий равна нулю.

Условная вероятность события B при условии A – это вероятность наступления события B при условии, что событие A уже произошло. Обозначается $P(B \mid A)$ или $P_A(B)$. Если $P(A) = P(B)$, то $P(A \mid B) = P(B \mid A)$, иначе $P(A \mid B) \neq P(B \mid A)$.

Теоремы о вероятности

Вероятность суммы двух событий A и B:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Если событий A и B несовместны, то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \quad \text{при} \quad P(A \cdot B) = 0$$

Вероятность произведения двух событий A и B:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

Если событий A и B независимы, то вероятность их произведения равна произведению их вероятностей:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \quad \text{при} \quad P(B \mid A) = P(B) \text{ и } P(A \mid B) = P(A)$$

Если вероятность события B зависит от нескольких несовместных событий A_1, $A_2, \dots A_k$, то выполняется *формула полной вероятности*:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) + \ldots + P(A_k) \cdot P(B \mid A_k).$$

Если события $A_1, A_2, \ldots A_k$ образуют полную группу событий, то

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k) = 1.$$

В частности,

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Пример 1. Найти вероятность выпадения простого нечетного числа на кубике.

Решение:

<u>1 способ</u> (по определению). Благоприятные элементарные исходы – это выпадение чисел 3 и 5, тогда вероятность равна $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

<u>2 способ</u> (через теорему о вероятности произведения). Пусть A = «выпало простое число», B = «выпало нечетное число». Тогда искомое событие – это $A \cdot B$. Очевидно, $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Однако если известно, что событие A наступило, то есть выпало число 2, 3 или 5, то в этом случае вероятность того, что число нечетное, составит $P(B \mid A) = \frac{2}{3}$ (нечетными являются числа 3 и 5). По формуле вероятности произведения, $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Стоит заметить, что события A и B являются зависимыми, и произведение их вероятностей не является вероятностью их произведения: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$ – довольно частая ошибка в подобных ситуациях.

Пример 2. Помещение освещается фонарем с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,1. Найти вероятность того, что хотя бы одна лампа перегорит.

Решение:

Вообще говоря, из условия не следует, что лампы перегорают независимо друг от друга. Но если не сказано обратного, то в подобных задачах считаем их перегорание независимым.

<u>1 способ.</u> Событие «хотя бы одна лампа перегорит» можно представить в виде суммы несовместных событий A = «первая лампа перегорит» и B = «первая лампа не перегорит, а вторая перегорит», тогда $P(A + B) = P(A) + P(B)$. П условию, $P(A) = 0{,}1$. Событие B является произведением независимых событий C = «первая лампа не перегорит» и D = «вторая лампа перегорит», поэтому $P(B) = P(C \cdot D) = P(C) \cdot P(D)$. Вероятность события «первая лампа не перегорит» найдем вычитанием из 1 вероятности противоположного к нему события «первая лампа перегорит»: $P(C) = 1 – 0{,}1 = 0{,}9$. Окончательно получаем искомую вероятность: $P(A) + P(C) \cdot P(D) = 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}19$.

2 способ. Выпишем все элементарные исходы:

1. «Первая перегорит, вторая перегорит», $P_1 = 0,1 \cdot 0,1$

2. «Первая не перегорит, вторая перегорит», $P_2 = 0,9 \cdot 0,1$

3. «Первая перегорит, вторая не перегорит», $P_3 = 0,1 \cdot 0,9$

4. «Первая не перегорит, вторая не перегорит», $P_4 = 0,9 \cdot 0,9$.

Каждый исход является произведением двух независимых событий, поэтому вероятность равна их произведению:

Нашему событию благоприятствую 1й, 2й и 3й, поэтому исковая вероятность равна $P_1 + P_2 + P_3 = 0,19$.

Удобно исходы записывать кратко в виде таблицы:

	1 лампа	2 лампа	P
1 эл. исход	-	-	$0,1 \cdot 0,1$
2 эл. исход	+	-	$0,9 \cdot 0,1$
3 эл. исход	-	+	$0,1 \cdot 0,9$
4 эл. исход	+	+	$0,9 \cdot 0,9$

3 способ. Найдем вероятность противоположного события и вычтем его из 1. Противоположным к «хотя бы одна лампа перегорит» будет событие «обе лампы не перегорят». Его вероятность ищем как произведение вероятностей того, что каждая из ламп не перегорит, так как они перегорают независимо. Ну а вероятность того, что лампа не перегорит, найдет, вычитая из 1 вероятность ее перегорания: 1 – 0,1 = 0,9. Искомая вероятность в итоге равна 1 – 0,9 · 0,9 = 0,19.

Пример 3. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение:

1 способ. Событие «купили бракованное стекло» можно представить как сумму несовместных событий A = «купленное стекло сделано первой фабрикой, и при этом оно бракованное» и B = «купленное стекло сделано второй фабрикой, и при этом оно бракованное». Событие A есть произведение событий «стекло сделано на первой фабрике» и «стекло, сделанное первой фабрикой, бракованное». Эти события, очевидно, независимы, их вероятности равны соответственно 0,45 и 0,03, поэтому $P(A) = 0,45 \cdot 0,03$. Аналогично получим $P(B) = 0,55 \cdot 0,01$. Тогда в силу несовместности A и B, искомая вероятность равна $P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,45 \cdot 0,03 + 0,55 \cdot 0,01 = 0,019$.

2 способ. Пусть всего изготовлено x стекол. Тогда первая фабрика произвела $0{,}45x$ стекло, из которых бракованных оказалось $0{,}45x \cdot 0{,}03$, а вторая произвела $0{,}55x$ стекол, из которых бракованных $0{,}55x \cdot 0{,}01$. Всего бракованных стекол получается $0{,}45x \cdot 0{,}03 + 0{,}55x \cdot 0{,}01$. Доля общего числа стекол с браком относительно всех стекол и будет вероятностью купить бракованное стекло: $\frac{0{,}45x \cdot 0{,}03+0{,}55x \cdot 0{,}01}{x} = 0{,}019$.

3 способ. Пусть A_1 = «стекло сделано на первой фабрике», A_2 = «стекло сделано на второй фабрике B = «купленное стекло бракованное». Тогда по формуле полной вероятности:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) = 0{,}45 \cdot 0{,}03 + 0{,}55 \cdot 0{,}01 = 0{,}019.$$

Пример 4. Игральную кость бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 4. Какова вероятность того, что было сделано два броска? Ответ округлите до сотых.

Решение:

Пусть A = «Сделали два броска», B = «Сумма выпавших очков равна 4». Вероятность того, что сделано два броска при условии, что в сумме выпало 4 – это условная вероятность события A при условии B. Ее можно найти по формуле условной вероятности $P(A \mid B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$.

Событию B благоприятствуют исходы несовместные 4, 1-3, 3-1, 2-2, 1-1-2, 1-2-1, 2-1-1, 1-1-1-1. Их вероятности определяются так:

Исход	4	1-3	3-1	2-2	1-1-2	1-2-1	2-1-1	1-1-1-1
Вероятность	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6^2}$	$\frac{1}{6^2}$	$\frac{1}{6^2}$	$\frac{1}{6^3}$	$\frac{1}{6^3}$	$\frac{1}{6^3}$	$\frac{1}{6^4}$

Тогда $P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} \cdot 3 + \frac{1}{6^3} \cdot 3 + \frac{1}{6^4} = \frac{343}{1296}$.

Событие $A \cdot B$ заключается в том, что за два броска выпало 4 очка. Ему благоприятствуют несовместные исходы 1-3, 3-1, 2-2. Поэтому $P(A \cdot B) = \frac{1}{6^2} \cdot 3 = \frac{1}{12}$.

В итоге получаем $P(A \mid B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{1}{12} : \frac{343}{1296} = \frac{108}{343} \approx 0{,}31$.