Разложение на множители многочленов с целыми коэффициентами. Схема Горнера.

Алтухов Д.А., Москва 2020

Корнем многочлена $p(x)$ называется такое число a, что $p(a) = 0$.

Теорема о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами:

> Если дробь $\frac{m}{n}$ является корнем многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x^1 + a_n$, то:
>
> m – делитель свободного члена (a_n); n – делитель старшего коэффициента (a_0).

Например, для многочлена $p(x) = 2x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 13x + 12$ кандидатами в корни будут все комбинации дробей с числителями $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \pm 6;\ \pm 12$ – все эти числа являются делителями свободного члена $p(x)$ – числа 12, и знаменателями $\pm 1;\ \pm 2$ – делители старшего коэффициента 2.

Удобства и краткости ради это можно записать так: $\pm\frac{1;2;3;4;6;12}{1;2}$. Отсюда видно, что все возможные комбинации – это: $\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \pm 6;\ \pm 12;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{3}{2}$. Получаем 16 кандидатов в рациональные корни – немало, но зато ограниченное количество.

Являются ли эти числа корнями можно выяснить прямой подстановкой в $p(x)$ или делением исходного многочлена на выражение ($x - a$), где a – проверяемый кандидат. Но есть способ покороче, о нем и пойдет речь дальше.

"Схема Горнера" (или *"метод Горнера"*) – удобный способ находить значение многочлена в некоторой точке без непосредственной подстановки числа в многочлен. Этот способ заключается в заполнении некоторой таблицы определенным способом. На примере записанного выше многочлена разберем, как работает эта схема.

Составим такую таблицу, в столбцах которой будут коэффициенты нашего многочлена в порядке убывания степеней (при этом если какая-то степень отсутствует, но на месте соответствующего коэффициента нужно написать ноль, но пока это не наш случай):

a	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	***p(a)***
	2	–3	–24	13	12	

Старший коэффициент сносим направо-вниз по диагонали, а в первом столбце той же строчки записываем одного из кандидатов в корни – какой понравится, но разумнее начать с тех, что попроще – например, с единицы (потом станет понятно, что значит "попроще"):

a	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	***p(a)***
	2	–3	–24	13	12	
1		2				

Далее умножаем нашего кандидата на снесенное число и прибавляем к тому, что записано над ним:

$1 \cdot 2 + (-3) = -1$

Результат записываем в следующую справа ячейку:

a	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	***p(a)***
	2	–3	–24	13	12	
1		2	–1			

Стрелочки нарисованы для того, чтобы вы поняли, кого куда умножать и складывать; в вашем решении их рисовать, разумеется, не нужно.

Теперь повторяем то же самое с последним полученным числом:

a	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	***p(a)***
	2	–3	–24	13	12	
1		2	–1	–25		

Потом еще раз:

a	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	***p(a)***
	2	–3	–24	13	12	
1		2	–1	–25	–12	

И еще раз:

a	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	***p(a)***
	2	–3	–24	13	12	
1		2	–1	–25	–12	0

В результате мы получили ноль – итоговое число, согласно данному методу, и есть значение $p(x)$ в проверяемой точке. То есть $p(1) = 0$. Это и означает, что число 1 является корнем многочлена $p(x)$. Вот таким образом этот замечательный метод позволяет проверить, является ли некоторое число корнем многочлена. Но это еще не всё.

Числа в последней строчке таблицы – это коэффициенты многочлена, полученного в результате деления $p(x)$ на $(x – a)$ – в нашем случае на $(x – 1)$:

$$2x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 13x + 12 = (x-1)(2x^3 - x^2 - 25x - 12).$$

Для того, чтобы найти следующий корень исходного многочлена, нужно ту же процедуру проделать с $2x^3 - x^2 - 25x - 12$. Можно не рисовать новую таблицу, а продолжать старую.

Так как свободный член и старший коэффициент у нас не поменялись (по модулю), то и кандидаты в корни остались те же. Важно, что полученный ранее корень $p(x)$ – в нашем случае число 1 – может оказаться корнем нового многочлена, это называется кратный корень. С него и начнем проверку (нарисуем лишь некоторые стрелочки) :

a	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	***p(a)***
	2	–3	–24	13	12	
1		2	–1	–25	–12	0
1			2	1	–24	–36

На этот раз ноль не получился. Это означает, что проверяемый кандидат не оказался корнем последнего многочлена ($2x^3 - x^2 - 25x - 12$).

Важно! Если на каком-либо этапе число не подошло (то есть не оказалось корнем), то дальше его проверять уже не нужно (подумайте над этим). То есть в нашем случае 1 больше не рассматриваем как кандидата.

Заметим, что число 1 можно очень легко проверить на принадлежность к корням – для этого достаточно сложить все коэффициенты многочлена, и если их сумма равна нулю, то это корень (подумайте, почему это так).

Проверяем дальше, продолжая ту же таблицу. При этом предыдущий коэффициент сносится в тот же столбец, что и в прошлый раз, и складывать результаты умножения следует с числами из предыдущей строки. Рассмотрим число $-\frac{1}{2}$:

a	*x⁴*	*x³*	*x²*	*x¹*	*x⁰*	*p(a)*
	2	–3	–24	13	12	
1		2	–1	–25	–12	0
1			2	1	–24	–36
$-\frac{1}{2}$			2	–2	–24	0

Подошло. Значит, $2x^4-3x^3-24x^2+13x+12=(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-2x-24)$.

Корни последнего трехчлена $2x^2-2x-24$ можно без труда найти через дискриминант, теорему Виета, группировку и тд. Но для тренировки давайте доведем нашу таблицу до конца.

Отметим, что если все полученные коэффициенты имеют общий делитель, то можно каждый из них на него разделить, при этом корни не изменятся (подумайте, почему). Запишем поделенные на 2 коэффициенты трехчлена под старыми (в первой ячейке напишем "**/2**") и продолжим, пробуя в качестве корня число –3, а затем число 4:

a	*x⁴*	*x³*	*x²*	*x¹*	*x⁰*	*p(a)*
	2	–3	–24	13	12	
1		2	–1	–25	–12	0
1			2	1	–24	–36
$-\frac{1}{2}$			2	–2	–24	0
/2			1	–1	–12	
–3				1	–4	0
4					1	0

Важно! Множителем в итоговом разложении является произведение всех чисел, на которые мы делили коэффициенты – в данном случае это число 2 – и последнего оставшегося коэффициента в разряде единиц (у нас это 1, но если бы мы не делили на 2, то эта двойка осталась бы в последней ячейке). Последняя фраза может оказаться непростой для понимания, но она необходима.

Можно так не заморачиваться и записать разложение многочлена в виде $p(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$, где a_0 – старший коэффициент $p(x)$, а x_1, x_2, ... x_n –

его корни. Но это работает только если число найденных корней (с учетом кратности) совпадает со степенью многочлена.

Таким образом, $2x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 13x + 12 = 2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+3)(x-4).$

Итоговая таблица в различных случаях выглядит примерно как наша, а иногда и хуже – далеко не всегда удается сразу угадать корни (мы "не угадали" всего один раз).

Важно! Если на каком-то этапе ни один из кандидатов в корни не подошел, то есть не дал 0 в правом столбце, то у последнего многочлена нет рациональных корней, и дальше линейные множители с рациональными корнями выделить нельзя.

Далее приведем несколько примеров с выписанными кандидатами и вариантами заполнения таблиц – решайте сначала сами, а потом сверяйтесь, и примеры для самостоятельного решения без ответов.

Задание для всех примеров – разложить многочлен на множители.

Пример 1. $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Кандидаты: $\pm\frac{1;2;3}{1} \to \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3$.

a	***x³***	***x²***	***x¹***	***x⁰***	***p(a)***
	1	–6	11	–6	
1		1	–5	6	0
1			1	–4	2
–1			1	–6	12
2			1	–3	0
3				1	0

Ответ: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$.

Здесь мы заполняли таблицу до упора, в дальнейшем будем понижать только до второй степени – дальше сами.

Пример 2. $p(x) = x^3 - 3x + 2$.

Кандидаты: $\pm\frac{1;2}{1} \to \pm 1;\ \pm 2$.

a	***x³***	***x²***	***x¹***	***x⁰***	***p(a)***
	1	0	–3	2	
1		1	1	–2	0

В конце остался трехчлен x^2+x-2, который раскладывается на множители как $(x-1)(x+2)$.

Ответ: $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$.

Пример 3. $p(x)=x^4+5x^3-9x^2-81x-108$.

Кандидаты: $\pm 1;2;3;4;6;9;12;18;27;36;54;108$ (знак $\pm$ у каждого числа).

24 кандидата – это немало. Но не стоит унывать. Чаще всего до больших чисел дело не доходит. Хотя повозиться здесь придется. Перебирать будем все подряд, начиная с –1 (видно, что 1 не подходит).

a	***x***[4]	***x***[3]	***x***[2]	***x***[1]	***x***[0]	***p(a)***
	1	5	–9	–81	–108	
–1		1	4	–13	–68	–40
2		1	7	5	–71	–250
–2		1	3	–15	–51	–6
3		1	8	15	–36	–216
–3		1	2	–15	–36	0
–3			1	–1	–12	0

$x^2-x-12=(x+3)(x-4)$

Ответ: $x^4+5x^3-9x^2-81x-108=(x+3)^3(x-4)$. Корень –3 имеет кратность, равную 3.

Пример 4. $p(x)=3x^4+5x^3+4x^2+x-1$.

Кандидаты: $\pm\frac{1}{1;3} \rightarrow \pm 1;\ \pm\frac{1}{3}$.

a	***x***[4]	***x***[3]	***x***[2]	***x***[1]	***x***[0]	***p(a)***
	3	5	4	1	–1	
–1		3	2	2	–1	0
–1			3	–1	3	–4
$\frac{1}{3}$			3	3	3	0
/3			1	1	1	

Последний многочлен мы поделили на 3 (не забудем этот множитель в итоговом разложении), получилось x^2+x+1 – действительных корней он не имеет.

Ответ: $3x^4+5x^3+4x^2+x-1=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+1)(x^2+x+1)$.

Пример 5. $p(x)=x^5-2x^4+x^3-2x^2+x-2$.

Кандидаты: $\pm\frac{2}{1}\ \to \pm 1;\ \pm 2$.

a	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	*p(a)*
	1	–2	1	–2	1	–2	
1		1	–1	0	–2	–1	–3
–1		1	–3	4	–6	7	–9
2		1	0	1	0	1	0
2			1	2	5	10	21
–2			1	–2	5	–10	21

Оказалось, что из всех кандидатов в корни подходит только число 2 – других действительных корней данный многочлен не имеет. Кстати понять это можно было и раньше – полученный после нахождения первого корня многочлен x^4+x^2+1 при всех *x* положителен, то есть корней не имеет.

Все же его можно разложить на произведение квадратных трехчленов:

$$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

Ответ: $x^5-2x^4+x^3-2x^2+x-2=(x-2)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

Пример 6. $p(x)=36x^4-12x^3-77x^2+13x+12$.

Кандидаты: $\pm\frac{1;2;3;4;6;9;12}{1;2;3;4;6;9;12;18;36}\ \to$

$\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \pm 6;\ \pm 9;\ \pm 12;\ \pm 18;\ \pm 36;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{3}{2};\ \pm\frac{9}{2};\ \pm\frac{1}{3};\ \pm\frac{2}{3};$

$\pm\frac{4}{3};\ \pm\frac{1}{4};\ \pm\frac{3}{4};\ \pm\frac{9}{4};\ \pm\frac{1}{6};\ \pm\frac{1}{9};\ \pm\frac{2}{9};\ \pm\frac{1}{9};\ \pm\frac{2}{9};\ \pm\frac{4}{9};\ \pm\frac{1}{12};\ \pm\frac{1}{18};\ \pm\frac{1}{36}.$

Вот здесь уже на поиски корня можно потратить довольно много времени – ведь целых корней нет, а заранее понять это не получится. Приведем таблицу, в которой проверяются только подходящие числа:

a	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	*p(a)*
	36	–12	–77	13	12	
$\frac{1}{2}$		36	6	–74	–24	0
		36	6	–74	–24	0
/2		18	3	–37	–12	
$\frac{3}{2}$			18	30	8	0
/2			9	15	4	
$-\frac{1}{3}$				9	12	0
/3				3	4	
$-\frac{4}{3}$					3	0
/3					1	

$2\cdot 2\cdot 3\cdot 3=36$

Ответ: $36x^4-12x^3-77x^2+13x+12=36\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right).$

Задачи для самостоятельного решения

Разложить на множители:

1. $x^3+6x^2+11x+6$
2. x^3-7x+6
3. $2x^4+15x^3+15x^2-20x-12$
4. $x^4+4x^3-16x-16$
5. $3x^4+5x^3+4x^2+x-1$
6. $x^5-2x^4-81x+162$
7. $6x^5-7x^4-54x^3+64x^2-9$
8. $x^5+3x^4+x^3+3x^2+x+3$
9. $x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1$
10. $x^7-3x^6-6x^5+18x^4+9x^3-27x^2-4x+12$