Министерство образования и науки Российской Федерации
Физико-техническая школа республики Дагестан

МАТЕМАТИКА

Степень с натуральным показателем.

Одночлены, многочлены и действия с ними.

Задание №2 для 7 классов

(2018 – 2019 учебный год)

г. Москва, 2018

Математика: задание №2 для 7 классов (2018 – 2019 учебный год), 2018, 24 с.

Дата отправления задания – 15 января 2019 года

Учебно-методическое пособие состоит из теоретической части, в которой приводятся типовые примеры решения задач, и задания по пройденным темам для самостоятельного решения.

Составитель: Алтухов Д.А.

§1. Степень с натуральным показателем

В предыдущем задании мы познакомились с математическим языком и с примерами его использования. В дальнейшем практически все математические утверждения будут записаны на этом языке. Для начала напомним понятие и свойства степени числа с натуральным показателем и запишем их на математическом языке.

I. Понятие степени с натуральным показателем

Запись a^n при n = 1, 2, 3, … обозначает произведение n одинаковых множителей, равных a. То есть $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множителей}}$.

Выражение a^n называется степенью числа a с натуральным показателем n, число a – основанием степени, n – показателем степени. Степенью числа a с показателем 1 называют данное число a.

Выражение a^n следует читать как "a в n-ной ("энной") степени", или "a в степени n". Для второй и третьей степени чаще используются следующие прочтения: a^2 – "a в квадрате", a^3 – "a в кубе", хотя допускаются прочтения "a во второй степени" и "a в третьей степени".

Пример 1. Вычислите:

а) 3^5; б) 0^{20}; в) $(-4)^4$;

г) $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^3$; д) $(-2)^3 \cdot 4^1 : (-3)^2$;

е) $$\frac{\dfrac{2^3}{(-3)^3} \cdot \left(3^2\right)^2 \cdot \dfrac{1}{(-4)^2}}{\dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{2^2}}.$$

Δ а) $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$;

б) $0^{20} = 0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0 = 0$ – произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю (а в данном случае все двадцать множителей являются нулями).

в) $(-4)^4 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = 256$;

г) $$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = -\frac{8}{125} = -0{,}064.$$

Приводить обыкновенные дроби к десятичным не обязательно, но рекомендуем это делать для конечного ответа в качестве тренировки – в дельнейшем это очень пригодится. Особенно важно уметь определять, возможно ли данную обыкновенную дробь представить в виде конечной десятичной дроби.

д) $(-2)^3 \cdot 4^1 : (-3)^2 = -8 \cdot 4 : 9 = -3\frac{5}{9}$;

е) $$\frac{\frac{2^3}{(-3)^3}\cdot\left(3^2\right)^2\cdot\frac{1}{(-4)^2}}{\frac{1}{4}+\frac{5}{2^2}} = \frac{\frac{8}{-27}\cdot(9)^2\cdot\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}+\frac{5}{4}} = \frac{-\frac{1}{27\cdot 2}\cdot 81}{\frac{6}{4}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} =$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3} = -1. \quad \blacktriangle$$

Отметим, что ноль в любой натуральной степени равен нулю: $0^n = 0\cdot 0\cdot\ldots\cdot 0 = 0.$ Любая степень единицы равна одному, $1^n = 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1 = 1.$ При возведении в натуральную степень числа –1 в случае четного показателя получим $(-1)^{2n} = \underbrace{(-1)\cdot(-1)\cdot\ldots\cdot(-1)}_{2n\ \text{множителей}} = 1$, а в случае нечетного показателя $(-1)^{2n-1} = \underbrace{(-1)\cdot(-1)\cdot\ldots\cdot(-1)}_{2n-1\ \text{множителей}} = -1.$

Аналогично при возведении отрицательного числа в четную степень получится положительное число, а при возведении в нечетную – отрицательное. Положительное число в любой степени будет положительным.

Например, $(-3)^3 = -27$; $(-3)^4 = 81$; $3^3 = 27$; $3^4 = 81$.

II. Свойства степени с натуральным показателем

Рассмотрим выражение $a^3 \cdot a^4$, являющееся произведением двух степеней с одинаковыми основаниями. Преобразуем его согласно определению степени с натуральным показателем:

$$a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7.$$

Легко заметить, что $a^3 \cdot a^4 = a^{3+4}$.

Рассмотрим произведение двух степеней с равными основаниями в более общем виде – с произвольными натуральными показателями m и n:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ \text{множителей}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множителей}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n\ \text{множителей}} = a^{m+n}.$$

Таким образом, для любого числа a и любых натуральных чисел m и n верно равенство:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Доказанное свойство верно также для произведения любого количества степеней:

$$a^m \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^p = a^{m+n+\ldots+p}.$$

Далее докажем свойство деления степеней с одинаковыми основаниями. Преобразуем следующее выражение, используя полученное свойство:

$a^{m-n} \cdot a^n = a^{(m-n)+n} = a^m$, то есть $a^m = a^{m-n} \cdot a^n$. Если $a \neq 0$, то можно разделить обе части на a^n. Мы получаем следующее равенство для любого $a \neq 0$ и любых натуральных m и n ($m > n$):

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Данное свойство можно также записать в виде $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Теперь рассмотрим выражение $(a^m)^n$:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n\ \text{множителей}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n\ \text{слагаемых}}} = a^{m \cdot n}.$$

Таким образом, мы доказали, что для любого a и любых натуральных m и n верно:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Пример 2. Упростите выражения:

а) $a^2 \cdot a^5 \cdot a^8$; б) $x^6 : x^3 \cdot x^5$;

в) $\left(\left(q^2\right)^4\right)^8$; г) $\left(\dfrac{t^{10}}{(t \cdot t^4)^2}\right)^{100}, t \neq 0.$

Δ а) $a^2 \cdot a^5 \cdot a^8 = a^{2+5+8} = a^{15}$; б) $x^6 : x^3 \cdot x^5 = x^{6-3+5} = x^8$;

в) $\left(\left(q^2\right)^4\right)^8 = q^{2\cdot4\cdot8} = q^{64}$; г) $\left(\dfrac{t^{10}}{(t \cdot t^4)^2}\right)^{100} = \left(\dfrac{t^{10}}{(t^{1+4})^2}\right)^{100} =$

$$= \left(\frac{t^{10}}{(t^5)^2}\right)^{100} = \left(\frac{t^{10}}{t^{2\cdot5}}\right)^{100} = \left(\frac{t^{10}}{t^{10}}\right)^{100} = (1)^{100} = 1. \quad \blacktriangle$$

На всякий случай упомянем, что, например, выражение $4a^3$ означает $4a^3 = 4 \cdot a^3 = 4 \cdot a \cdot a \cdot a$, а не $(4a)^3$.

Выясним теперь свойства степеней с разными основаниями и одинаковыми натуральными показателями.

Преобразуем следующее выражение:

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множителей}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n\ \text{множителей}}.$$

Применяя переместительное свойство умножения $a \cdot b = b \cdot a$, можно перегруппировать последнее выражение следующим образом:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множителей}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n\ \text{множителей}} = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n\ \text{множителей}} = (a \cdot b)^n.$$

Итак, мы доказали следующее свойство для любых значений a и b и натуральных n:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n.$$

Далее докажем свойство деления степеней с равными показателями. Для этого преобразуем выражение $(b \neq 0)$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n\ \text{множителей}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n\ \text{множителей}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n\ \text{множителей}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Делаем вывод, что для любых

значений *a*, любых $b \neq 0$ и при всех натуральных n выполняется равенство:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Данное свойство можно также записать в виде $(a:b)^n = a^n : b^n$.

Пример 3. Вычислите:

$$\text{а) } 16^6 : 24^6 \cdot 1{,}5^6; \qquad \text{б) } \left(\frac{2^7 : 2^5 \cdot 18^2}{4^2 \cdot 3^6 : 3^4}\right)^2.$$

Δ а) $16^6 : 24^6 \cdot 1{,}5^6 = (16 : 24 \cdot 1{,}5)^6 = 1^6 = 1.$

б)

$$\left(\frac{2^7 : 2^5 \cdot 18^2}{4^2 \cdot 3^6 : 3^4}\right)^2 = \left(\frac{2^{7-5} \cdot 18^2}{4^2 \cdot 3^{6-4}}\right)^2 = \left(\frac{2^2 \cdot 18^2}{4^2 \cdot 3^2}\right)^2 = \left(\frac{(2 \cdot 18)^2}{(4 \cdot 3)^2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{(36)^2}{(12)^2}\right)^2 = \left(\left(\frac{36}{12}\right)^2\right)^2 = \left(3^2\right)^2 = 3^4 = 81. \quad ▲$$

Пример 4. Упростите выражения:

а) $2^n \cdot 5^n \cdot 8^n$; б) $\left(x \cdot x^5 \cdot (y \cdot y^2)^2\right)^3$;

в) $\left(\dfrac{3p^2q^5}{2q^4}\right)^3, t \neq 0;$ г) $\left(\dfrac{5t^m z^n}{4t^k z^p}\right)^r, t \neq 0, z \neq 0.$

Δ а) $2^n \cdot 5^n \cdot 8^n = (2 \cdot 5 \cdot 8)^n = 80^n$;

б) $\left(x \cdot x^5 \cdot (y \cdot y^2)^2\right)^3 = \left(x^{1+5} \cdot (y^{1+2})^2\right)^3 = \left(x^6 \cdot (y^3)^2\right)^3 = \left(x^6 \cdot y^6\right)^3 =$

$= \left(x^6\right)^3 \cdot \left(y^6\right)^3 = x^{18}y^{18}$; в) $\left(\dfrac{3p^2q^5}{2q^4}\right)^3 = \dfrac{\left(3p^2q^5\right)^3}{\left(2q^4\right)^3} = \dfrac{3^3\left(p^2\right)^3\left(q^5\right)^3}{2^3\left(q^4\right)^3} =$

$= \dfrac{27p^6q^{15}}{8q^{12}} = \dfrac{27p^6q^{15-12}}{8} = \dfrac{27p^6q^3}{8}$; г) $\left(\dfrac{5t^m z^n}{4t^k z^p}\right)^r = \left(\dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{t^m}{t^k} \cdot \dfrac{z^n}{z^p}\right)^r =$

$= \left(\dfrac{5}{4} t^{m-k} z^{n-p}\right)^r = \left(\dfrac{5}{4}\right)^r \left(t^{m-k}\right)^r \left(z^{n-p}\right)^r = \dfrac{5^r}{4^r} t^{(m-k)r} z^{(n-p)r}.$ ▲

III. Степень с нулевым показателем

Мы выяснили, что $a^m : a^n = a^{m-n}$ при $m > n$. Если данное свойство применить для случая $m = n$, то получим $a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$. Так как для любого $a \neq 0$ верно $a^n : a^n = 1$, то степень с нулевым показателем числа a, отличного от нуля, считают равной единице:

$a^0 = 1,\ a \neq 0.$

Отменим, что выражение 0^0 не имеет смысла.

Пример 5. Вычислите:

а) 5^0; б) $\left(-\dfrac{77}{123}\right)^0$; в) $\left(\left(x^{11}\right)^0\right)^{22}, x \neq 0$; г) $\left(\left(\dfrac{p-q}{z}\right)^{10}\right)^0, z \neq 0.$

Δ а) $5^0 = 1$; б) $\left(-\frac{77}{123}\right)^0 = 1$; $\left(\left(x^{11}\right)^0\right)^{22} = x^{11\cdot 0\cdot 22} = x^0 = 1$;

г) $\left(\left(\frac{p-q}{z}\right)^{10}\right)^0 = \left(\frac{p-q}{z}\right)^{10\cdot 0} = \left(\frac{p-q}{z}\right)^0$. Если $p = q$, то $\left(\frac{p-q}{z}\right)^0 =$

$= \left(\frac{0}{z}\right)^0 = 0^0$ – данное выражение не имеет смысла. Если $p \neq q$, то

$\frac{p-q}{z} \neq 0$, $\left(\frac{p-q}{z}\right)^0 = 1$. ▲

Обобщая данный параграф, выпишем
<u>свойства степени с натуральным показателем:</u>

1) $a^0 = 1,\ a \neq 0.$

2) $a^1 = a$

3) $0^n = 0,\ n \in N$

4) $(-1)^{2n} = 1,\ (-1)^{2n-1} = -1,\ n \in N$

При одинаковых основаниях:

5) $a^m \cdot a^n = a^{m+n},\ m,n \in N$

6) $\frac{a^m}{a^n} = a^m : a^n = a^{m-n},\ m > n,\ m,n \in N$

7) $(a^m)^n = a^{mn},\ m,n \in N$

При одинаковых показателях:

8) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n,\ n \in N$

9) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(a : b\right)^n = a^n : b^n,\ b \neq 0,\ n \in N.$

§2. Одночлены

I. Понятие одночлена

Одночленом называют алгебраическое выражение, являющееся произведением чисел, переменных и их степеней. К одночленам также относят числа, переменные и их степени.

Примеры одночленов:

$2x^2y$; $a\cdot(-7)\cdot b^6$; -100; t; $\dfrac{pqr}{4}$; $a^m b^{3m}, m \in N$; $\left(\dfrac{2}{9}\right)^5 x^2 \cdot (-3)xy^4$.

Выражение $\dfrac{pqr}{4}$ также является одночленом, так как его можно представить в виде произведения числа и переменных: $\dfrac{pqr}{4} = \dfrac{1}{4}pqr$.

Примеры алгебраических выражений, не являющихся одночленами: $x - y$; $-3a^3 + a^2 - 4b$; $\dfrac{d}{c}$; $\dfrac{5}{z + t^3}$.

Если одночлен записан таким образом, что в нем:

1) *присутствует единственный числовой множитель, стоящий на первом месте;*
2) *переменные не повторяются;*
3) *нет повторного возведения в степень,*

то говорят, что одночлен записан в *стандартном виде*. Переменные принято располагать в алфавитном порядке. Числовой множитель называется *коэффициентом*. Если коэффициент равен 1 или -1, его принято не писать (в случае -1 только обозначать знак "–"): $1ay^5 = ay^5$, $-1p^3qt^5 = -p^3qt^5$.

Одночлены $3ab^2$; cde; $-\dfrac{3}{8}x^3yz^5$; -50; $-p$ записаны в стандартном виде. Они имеют соответственно следующие коэффициенты: 3; 1; $-\dfrac{3}{8}$; -50; -1.

Для того, чтобы привести одночлен к стандартному виду, нужно:

1) *перемножить все числовые множители одночлена и поставить результат на первое место;*
2) *перемножить все степени с одним основанием так, чтобы переменные не повторялись;*
3) *упростить все остальные степени таким образом, чтобы не было повторного возведения в степень.*

Степенью одночлена называется сумма показателей всех входящих в него переменных. Если в одночлен не входят переменные и он отличен от нуля, то его степень считается равной нулю.

Например, одночлен $-6a^4b^5$ имеет степень 9, у одночлена $10xy$ степень 2, у $\frac{5}{18}p^3qt^6$ – 10, у одночлена 150 степень равна 0.

Пример 6. Выясните, какие алгебраические выражения являются одночленами, приведите их к стандартному виду, назовите коэффициент и степень одночлена.

а) $\dfrac{(-2cd)(-3cd)}{4}$;

б) $(4kp^4)^0$, $k \neq 0$, $p \neq 0$;

в) $x^6y^4\dfrac{1}{3}xy^4 \cdot 5$;

г) $\dfrac{7a^3bc^4}{-14:3}bc^2$;

д) $\dfrac{n+2m}{3}$;

е) $\left(\dfrac{p^m \cdot q(2p)^m}{3^2-2^3}\right)^2$, $m, n \in N$.

Δ а) $\dfrac{(-2cd)(-3cd)}{4} = \dfrac{-2\cdot(-3)\cdot c\cdot c\cdot d\cdot d}{4} = \dfrac{6c^2d^2}{4} = 1{,}5c^2d^2$. Данное выражение является одночленом с коэффициентом 1,5. Степень данного одночлена равна 2 + 2 = 4.

б) Если $k \neq 0$ и $p \neq 0$, то $(4kp^4)^0 = 1$ – это одночлен, коэффициент равен 1, а степень равна 0.

в) $x^6y^4\frac{1}{3}xy^4\cdot 5=\frac{1}{3}\cdot 5\cdot x^6xy^4y^4=\frac{5}{3}x^7y^8$. Полученное выражение – одночлен с коэффициентом $\frac{5}{3}$. Степень этого одночлена равна 7 + 8 = 15.

г) $\frac{7a^3bc^4}{-14:3}bc^2=\frac{7}{-14:3}a^3\cdot b\cdot b\cdot c^4\cdot c^2=\left(7:\left(-\frac{14}{3}\right)\right)a^3b^2c^6=$

$=-1{,}5a^3b^2c^6$. Это выражение является одночленом, коэффициент которого равен –1,5. Его степень 3 + 2 + 6 = 11.

д) В данном выражении присутствует сумма переменных, которая не может быть сведена к произведению, поэтому это выражение одночленом не является.

е) $\left(\frac{p^m\cdot q(2p)^m}{3^2-2^3}\right)^2=\left(\frac{p^m\cdot q\cdot 2^m p^m}{9-8}\right)^2=\left(\frac{2^m p^{2m}q}{1}\right)^2=\left(2^m p^{2m}q\right)^2=$

$=2^{2m}p^{4m}q^2$ – полученное выражение есть одночлен с коэффициентом 2^{2m}. Его степень равна $4m + 2$. ▲

II. Сложение и вычитание одночленов

Два одночлена называются *подобными*, если в них входят одни и те же переменные, каждая из которых имеет одинаковую степень в обоих одночленах. Такие одночлены называют также *подобными слагаемыми.*

Примеры подобных одночленов:

$2ax$ и $5ax$; b и $-b$; $\frac{8}{3}pq^4t^3$ и $-0{,}25pq^4t^3$; $6y^n$ и $\frac{9y^n}{5}$.

Если два одночлена подобны, то при их сложении можно вынести за скобку буквенную часть. Тогда в скобках останется сумма коэффициентов. Поэтому результатом сложения подобных одночленов будет одночлен с такой же буквенной частью и коэффициентом, равным сумме коэффициентов слагаемых одночленов.

Например, $5a^2x^3 + 8a^2x^3 = a^2x^3(5 + 8) = 13a^2x^3$.

Очевидно, что в случае вычитания одночленов вместо суммы коэффициентов окажется их разность.

Например, $7yt^3k - 16yt^3k = yt^3k(7 - 16) = -9yt^3k$.

Данная процедура называется *приведением подобных слагаемых.* При упрощении выражений сначала следует приводить одночлены к стандартному виду, чтобы было проще видеть подобные слагаемые.

Пример 7. Упростите выражение:

а) $\frac{4}{3}ab^3 + \frac{2}{3}ab^3$; б) $7cd^2f^5 - 16cd^2f^5 + 9cd^2f^5$;

в) $-xy^3z^2x + \frac{x^2y^2z^2y}{4}$; г) $5mn^2(-2k) + 0,5mn \cdot \frac{2}{3}nk - \left(-\frac{2}{3}n\right)^2 \cdot 3mk$.

Δ а) $\frac{4}{3}ab^3 + \frac{2}{3}ab^3 = \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right)ab^3 = 2ab^3$;

б) $7cd^2f^5 - 16cd^2f^5 + 9cd^2f^5 = (7 - 16 + 9)cd^2f^5 = 0$;

в) $-xy^3z^2x + \frac{x^2y^2z^2y}{4} = -x^2y^3z^2 + \frac{1}{4}x^2y^3z^2 = \left(-1 + \frac{1}{4}\right)x^2y^3z^2 =$

$= -\frac{3}{4}x^2y^3z^2$; г) $5mn^2(-2k) + 0,5mn \cdot \frac{2}{3}nk - \left(-\frac{2}{3}n\right)^2 \cdot 3mk =$

$= 5 \cdot (-2) \cdot mn^2k + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}mn^2k - \frac{2^2}{3^2} \cdot 3 \cdot mn^2k =$

$= -10mn^2k + \frac{1}{3}mn^2k - \frac{4}{3}mn^2k = -11mn^2k$. ▲

III. Умножение одночленов. Возведение одночленов в натуральную степень.

При умножении одночленов получится выражение, также являющееся одночленом, так как состоит из произведения чисел и степеней переменных. Поэтому для выполнения этого действия достаточно привести получившийся одночлен к стандартному виду. Умножать, конечно, можно не только подобные одночлены.

Для возведения одночлена в степень с натуральным показателем, согласно полученному в §1 правилу, достаточно возвести каждый множитель в эту степень и упростить выражение.

Пример 8. Упростите выражение:

а) $3p\cdot(-q)$; б) $\left(-5x^3yz^0\right)^3$;

в) $-a^5b^4\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)\left(ab^3\right)^2$; г) $\left(-4c^2d^6\right)^3\cdot\left(\left(-\dfrac{1}{2}cd^2\right)^2\cdot 3c\right)^3$.

∆ а) $3p\cdot(-q)=-3pq$; б) $\left(-5x^3yz^0\right)^3=(-5)^3\cdot\left(x^3\right)^3\cdot(y)^3\cdot(1)^3=$

$=-125x^9y^3$; в) $-a^5b^4\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)\left(ab^3\right)^2=\dfrac{4}{5}a^5b^4\cdot a^2b^6=0{,}8a^7b^{10}$;

г) $\left(-4c^2d^6\right)^3\cdot\left(\left(-\dfrac{1}{2}cd^2\right)^2\cdot 3c\right)^3=-64c^6d^{18}\cdot\left(\dfrac{1}{4}c^2d^4\cdot 3c\right)^3=$

$=-64c^6d^{18}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\left(c^2\right)^3\left(d^4\right)^3\cdot(3c)^3=-64c^6d^{18}\cdot\dfrac{1}{64}c^6d^{12}\cdot 27c^3=$

$=\dfrac{-64}{64}\cdot 27c^{6+6+3}d^{18+12}=-27c^{15}d^{30}$. ▲

IV. Деление одночлена на одночлен

При делении одночленов следует пользоваться обычными правилами умножения и деления чисел, а также свойствами степени с натуральным показателем. Полезно пользоваться тем свойством, что при делении произведения на число можно разделить один из множителей на это число и умножить результат на остальные множители. Например, $12a^2 : 4 = 12 : 4\cdot a^2 = 3a^2$; $x^4y^3 : xy = x^4 : x\cdot y^3 : y = x^3y^2$ (разумеется, делитель не должен быть равным нулю).

Пример 9. Упростите выражение:

а) $3a^6 : (-a^2)$; б) $0{,}36x^5y^8z : 2{,}4xyz$;

в) $\left(\frac{1}{3}z^2t^4p\right)^3:\left(-\frac{1}{9}zt^4p\right)^2$; г) $\dfrac{2nr^2\cdot(-1{,}5mr)^2}{\frac{1}{6}mn^0\cdot(3r)^3}$.

Δ а) $3a^6:(-a^2)=3:(-1)\cdot a^6:a^2=-3a^4$;

б) $0{,}36x^5y^8z:2{,}4xyz=\frac{0{,}36}{2{,}4}\cdot\frac{x^5}{x}\cdot\frac{y^8}{y}\cdot\frac{z}{z}=0{,}15x^4y^7$;

в) $\left(\frac{1}{3}z^2t^4p\right)^3:\left(-\frac{1}{9}zt^4p\right)^2=\frac{1}{27}z^6t^{12}p^3:\frac{1}{81}z^2t^8p^2=$

$=\left(\frac{1}{27}:\frac{1}{81}\right)\frac{z^6}{z^2}\frac{t^{12}}{t^8}\frac{p^3}{p^2}=9pt^4z^4$;

г) $\dfrac{2nr^2\cdot(-1{,}5mr)^2}{\frac{1}{6}mn^0\cdot(3r)^3}=\dfrac{2nr^2\cdot\frac{9}{4}m^2r^2}{\frac{1}{6}m\cdot 27r^3}=\dfrac{\frac{9}{2}nm^2r^4}{\frac{9}{2}mr^3}=nmr$. ▲

§3. Многочлены

I. Понятие многочлена

Многочленом называется сумма одночленов.

Примеры многочленов:

$a+5$; $2x^2-y$; $m^2nk^3-3mnk+1$; $\frac{p}{3}-\frac{t}{4}$.

Слагаемые, из которых состоит многочлен, называют *членами* многочлена. Если их два, то выражение называют *двучлен* (например, $a+3b$), если три – *трехчлен* (например, $3x-y^2z+4$). Одночлен также считают многочленом (состоящим из одного члена).

Если многочлен не содержит подобных слагаемых и каждый член записан в стандартном виде, то говорят, что данный многочлен приведен к *стандартному виду*. Для того, чтобы привести многочлен к стандартному виду, следует представить все его члены в стандартном виде, а затем привести подобные слагаемые.

Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней его членов. Чтобы определить степень произвольного многочлена, нужно привести его к стандартному виду и установить степень получившегося многочлена.

Пример 10. Определите, какие из данных алгебраических выражений являются многочленами, приведите их к стандартному виду и определите их степень.

а) $c+c^3-d^3$; б) $3ab^3-ab-4ab^3+5ab$;

в) $\dfrac{xy}{3}-\dfrac{3x^2}{4y}+1$; г) $6z^4+z^4-1{,}2z\cdot z^3-\left(2z^2\right)^2$;

д) $2q\left(-2p\right)^3+4pq\cdot\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}pq^4+7p\left(\dfrac{q^2}{2}\right)^2$;

е) $0{,}2\left(mn^2\right)^2-1{,}5mn\cdot 3m+4\left(mn\right)^2\cdot\dfrac{n^2}{10}+2{,}2m^2n.$

Δ а) Данный многочлен уже записан в стандартном виде, так как каждый член записан в стандартном виде и подобных среди них нет. Наибольшая степень у одночленов c^3 и $-d^3$, она равна 3 – это и есть степень данного многочлена.

б) При приведении подобных удобно подчеркивать подобные слагаемые одинаковым образом – так зрительно проще сосредоточить внимание на их коэффициентах, это поможет быстрее посчитать их сумму.

$\underline{3ab^3}-\underline{\underline{ab}}-\underline{4ab^3}+\underline{\underline{5ab}}=-ab^3+4ab$ – это стандартный вид исходного многочлена. Наибольшая степень у слагаемого $-ab^3$, она равна 1 + 3 = 4.

в) Данное выражение не является многочленом: во втором слагаемом присутствует деление на переменную y.

г) $\underline{6z^4}+\underline{z^4}-1{,}2z\cdot z^3-\left(2z^2\right)^2=\underline{7z^4}-\underline{1{,}2z^4}-\underline{4z^4}=1{,}8z^4$.

Полученное выражение является одночленом, а значит и многочленом. Его степень равна 4 – степень единственной переменной, входящей в него.

д) $2q(-2p)^3+4pq\cdot\left(\frac{p}{2}\right)^2-\frac{1}{4}pq^4+7p\left(\frac{q^2}{2}\right)^2=$

$=2q\left(-8p^3\right)+4pq\cdot\frac{p^2}{4}-\frac{1}{4}pq^4+7p\frac{q^4}{4}=\underline{-16qp^3}+\underline{p^3q}-\underline{\underline{\frac{1}{4}pq^4}}+\underline{\underline{\frac{7}{4}pq^4}}=$

$=-15p^3q+\frac{3}{2}pq^4$. Максимальную степень имеет член $\frac{3}{2}pq^4$, она равна 1 + 4 = 5.

е) $0,2\left(mn^2\right)^2-1,5mn\cdot 3m+4(mn)^2\cdot\frac{n^2}{10}+2,2m^2n=$

$=\underline{0,2m^2n^4}-\underline{\underline{4,5m^2n}}+\underline{\frac{4}{10}m^2n^4}+\underline{\underline{2,2m^2n}}=0,6m^2n^4-2,3m^2n.$

Мы привели исходный многочлен к стандартному виду. Его степень равна степени члена $0,6m^2n^4$ и составляет 2 + 4 = 6. ▲

Многочлены часто (но не всегда) обозначают латинской буквой *p* (по первой букве греческого слова *"polys"* – *"многочисленный", "множественный"*; также многочлены называют *полиномами*). Иногда в скобках указывают переменные, входящие в состав многочлена: $p(a)=-5a^4+2a, q(x;y)=x^2y+4y^2-1$. Если в скобках записаны конкретные числа, то требуется найти значение многочлена при заданных значениях переменных. Так, $p(1)=-5\cdot 1^4+2\cdot 1=-3$, $q(0;2)=0^2\cdot 2+4\cdot 2^2-1=15$.

Пример 11. Приведите к стандартному виду многочлен

$$p(a;b)=3ab\cdot\frac{1}{2}b^3-a\cdot(-5a^2b)-\left(\frac{b}{2}\right)^2\cdot 2ab^2+(-2a)^3\cdot 0,5b-7$$

и найдите $p(1;-2)$.

$$\Delta \quad p(a;b) = 3ab \cdot \frac{1}{2}b^3 - a \cdot (-5a^2b) - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot 2ab^2 + \left(-2\right)^3 \cdot a^3 \cdot 0{,}5b - 7 =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} a \cdot b \cdot b^3 + 5a \cdot a^2 \cdot b - \frac{b^2}{2^2} \cdot 2ab^2 + (-8) \cdot 0{,}5 \cdot a^3 \cdot b - 7 =$$

$$= \underline{\frac{3}{2}ab^4} + \underline{\underline{5a^3b}} - \underline{\frac{1}{2}ab^4} - \underline{\underline{4a^3b}} - 7 = ab^4 + a^3b - 7.$$

Последнее выражение есть стандартный вид исходного многочлена.

$$p(1;-2) = 1 \cdot \left(-2\right)^4 + 1^3 \cdot \left(-2\right) - 7 = 16 - 2 - 7 = 7.$$

Очевидно, если бы мы подставляли численные значения переменных в исходное выражение, то вычислить его значение оказалось бы намного труднее. И так большинстве случаев – проще сначала привести многочлен к стандартному виду, и только потом подставлять значения переменных. ▲

II. Сложение и вычитание многочленов

Для сложения или вычитания многочленов следует записать каждый многочлен в скобках и поставить между ними знак "+" в случае суммы и знак "–" в случае разности.

Далее нужно раскрыть скобки. Если перед скобкой стоит знак "+" или нет знака, то скобки отбрасывают и все члены, находившиеся в скобках, записывают с теми же знаками. В случае знака "–" перед скобкой знак каждого члена меняется на противоположный. Например, $-(a-b) = -a+b;$ $+(a-b) = a-b;$ $(a-b) = a-b.$

В результате суммы и разности нескольких многочленов получится также многочлен. Если в задании сказано упростить выражение, в котором складываются многочлены, то необходимо привести это выражение к многочлену стандартного вида.

Пример 12. Упростите выражение:

а) $(a^2 + a) - (2a^2 - 4a);$ б) $-(5x^3y + 2xy^2) + (-xy^2 + 5x^3y);$

в) $6n+m-1-(2k-2m+3)+(-4m-n-4)$;

г) $p + q - t$, где $p=cd-2c^3$, $q=-5c^2d-3c^3$, $t=-c^2d+4cd$.

Δ а) $(a^2+a)-(2a^2-4a)=\underline{a^2}+\underline{\underline{a}}-\underline{2a^2}+4\underline{\underline{a}}=-a^2+5a$;

б) $-(5x^3y+2xy^2)+(-xy^2+5x^3y)=\underline{-5x^3y}-\underline{\underline{2xy^2}}-\underline{\underline{xy^2}}+\underline{5x^3y}=-3xy^2$;

В данном примере сумма одночленов $-5x^3y$ и $5x^3y$ оказалась равна нулю: $-5x^3y+5x^3y=0$. В таком случае принято говорить, что подобные слагаемые *взаимно уничтожились*. Иногда в таких случаях ошибочно говорят, что эти выражения "сократились", но этот термин употребим только для дробей – при делении числителя и знаменателя на одно и то же число.

в) $6n+m-1-(2k-2m+3)+(-4m-n-4)=$

$=\underline{6n}+\underline{\underline{m}}-\underline{\underline{\underline{1}}}-2k+\underline{\underline{2m}}-\underline{\underline{\underline{3}}}-\underline{\underline{4m}}-\underline{n}-\underline{\underline{\underline{4}}}=5n-m-2k-8$;

г) $p+q-t=cd-2c^3+(-5c^2d-3c^3)-(-c^2d+4cd)=$

$=\underline{cd}-\underline{\underline{2c^3}}-\underline{\underline{\underline{5c^2d}}}-\underline{\underline{3c^3}}+\underline{\underline{\underline{c^2d}}}-\underline{4cd}=-3cd-5c^3-4c^2d$. ▲

III. Умножение многочлена на одночлен

Для того, чтобы умножить многочлен на одночлен, следует применить распределительный закон умножения:

$(a+b)\cdot c=ac+bc$, *или* $a\cdot(b+c)=ab+ac$.

После этого следует привести многочлен к стандартному виду. Порядок слагаемых при этом не принципиален, но старайтесь располагать одночлены по убыванию степеней и в алфавитном порядке.

Пример 13. Упростить выражение:

а) $3a(a+2a^2)$; б) $-\dfrac{2}{7}cd^2\left(\dfrac{3c}{5}-1\right)$;

в) $(-2x+y^2)x-3y(-4x-5xy)$;

г) $-1{,}2p(pq-2{,}5q)-\left(p^2+\frac{5}{8}p-\frac{2q^2}{27}\right)\cdot 4q+\left(\frac{2}{3}q\right)^3.$

Δ а) $3a(a+2a^2)=3a\cdot a+3a\cdot 2a^2=3a^2+6a^3=6a^3+3a^2.$
Последним действием мы поменяли местами слагаемые $6a^3$ и $3a^2$, чтобы расположить одночлены по убыванию степеней.

б) $-\frac{2}{7}cd^2\left(\frac{3c}{5}-1\right)=-\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{5}\cdot c\cdot c\cdot d^2+\frac{2}{7}cd^2=-\frac{6}{35}c^2d^2+\frac{2}{7}cd^2;$

в) $(-2x+y^2)x-3y(-4x-5xy)=$

$=-2x\cdot x+y^2\cdot x+(-3y)\cdot(-4x)+(-3y)\cdot(-5xy)=$

$=-2x^2+\underline{xy^2}+12xy+\underline{15xy^2}=16xy^2-2x^2+12xy;$

г) $-1{,}2p(pq-2{,}5q)-\left(p^2+\frac{5}{8}p-\frac{2q^2}{27}\right)\cdot 4q+\left(-\frac{2}{3}q\right)^3=$

$=-1{,}2p\cdot pq+1{,}2p\cdot 2{,}5q-p^2\cdot 4q-\frac{5}{8}p\cdot 4q+\frac{2q^2}{27}\cdot 4q+\left(-\frac{2}{3}\right)^3q^3=$

$=\underline{-1{,}2p^2q}+\underline{\underline{3pq}}-\underline{4p^2q}-\underline{\underline{\frac{5}{2}pq}}+\underline{\underline{\underline{\frac{8}{27}q^3}}}-\underline{\underline{\underline{\frac{8}{27}q^3}}}=-5{,}2p^2q+0{,}5pq.$

В последнем переходе одночлены $\frac{8}{27}q^3$ и $-\frac{8}{27}q^3$ взаимно уничтожились.

III. Умножение многочлена на многочлен

Данная процедура принципиально не отличается от знакомого нам раскрытия скобок. Если по-простому, то каждое слагаемое умножается на каждое. А если формулировать более строго, то:

Для умножения одного многочлена на другой следует умножить поочередно каждый член первого многочлена на каждый член второго, и затем упростить полученное выражение.

Если умножается больше двух многочленов, то нужно сначала перемножить какие-нибудь два, затем результат умножить на следующий многочлен и так далее.

Пример 14. Упростить выражение:

а) $(2a+b)(3a-4b)$; б) $(-xy^2-y+2)(x-3x^2y)$;

в) $(n-m)(m-k)(k-n)$; г) $2p(tp+q)(q-2)-3q(tq-t)(p+2q)$.

Δ а) $(2a+b)(3a-4b)=2a\cdot 3a+2a\cdot\left(-4b\right)+b\cdot 3a+b\left(-4b\right)=$

$=6a^2-8ab+3ab-4b^2=6a^2-5ab-4b^2$.

б) $(-xy^2-y+2)(x-3x^2y)=(-xy^2)\cdot x+(-xy^2)\cdot(-3x^2y)+(-y)\cdot x+$

$+(-y)\cdot(-3x^2y)+2\cdot x+2\cdot(-3x^2y)=\underline{-x^2y^2}+3y^3x^3-xy+\underline{3x^2y^2}+$

$+2x-6x^2y=2x^2y^2+3y^3x^3-xy+2x-6x^2y$.

в) $(n-m)(m-k)(k-n)=(nm-nk-m^2+mk)(k-n)=$

$=\underline{mnk}-n^2m-nk^2+n^2k-m^2k+m^2m+mk^2-\underline{mkn}=$

$=-mn^2-nk^2+n^2k-m^2k+m^2n+mk^2$;

г) $2p(tp+q)(q-2)-3q(tq-t)(p+2q)=$

$=(2tp^2+2pq)(q-2)-(3q^2t-3qt)(p+2q)=$

$=2tp^2\cdot q+2tp^2\cdot(-2)+2pq\cdot q+2pq\cdot(-2)-$

$-(3q^2t\cdot p+3q^2t\cdot 2q+(-3qt)\cdot p+(-3qt)\cdot 2q)=$

$=2p^2qt-4tp^2+2pq^2-4pq-3pq^2t-6q^3t+3pqt+6q^2t$

После раскрытия скобок в данном примере подобных слагаемых не оказалось. Последнее выражение является стандартным видом исходного выражения. ▲

Контрольные вопросы

1 (4). Вычислите:

а) $2^7 \cdot (-5)^3$; б) $\left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^4$; в) $\frac{2^2 \cdot 2^5 : 2^1}{2^4 \cdot 2^2 : 2^0}$;

г) $\left(-1\frac{2}{3}\right)^2 \cdot (0,4)^3 : \left(-1\frac{1}{3}\right)^3$.

2 (5). Установите, какие из выражений являются одночленами, приведите их к стандартному виду и определите коэффициенты:

а) $9,8a^2b^4$; б) $\frac{1,2xy}{3,8x^3}$; в) $\frac{-4,8p^3q}{6} \cdot q$;

г) $c(7c-8)$; д) $\frac{5,2mn^2}{-1,3} \cdot \left(-1\frac{3}{4}mk\right)$.

3 (2). Выполните действия:

а) $5,3ab^3 + 4,2ab^3 - 10,6ab^3$; б) $\frac{3xy^2z^3}{7} + \left(-\frac{5xy^2z^3}{14}\right)$;

4 (2). Вычислите:

а) $12^5 : 18^5 \cdot 4,5^5$; б) $\left(\frac{9^2 \cdot 6^3 : 12^2}{18^2 \cdot 3 : 2^2}\right)^2$.

5 (4). Упростите выражение:

а) $x^4x^0x^5$; б) $a^{18} : a^8 : (a^9 : a^2)$; в) $\left(\left(2q^0\right)^2\right)^3$; г) $\left(\frac{(b^2 \cdot 3b)^2}{(2b \cdot b)^2}\right)^2, b \neq 0$.

6 (2). Выполните умножение:

а) $3a \cdot 7b \cdot (-2c)$; б) $\frac{2}{5}xz \cdot \left(-\frac{10yz}{9}\right) \cdot \frac{3}{4}xy$;

7 (5). Установите, какие из выражений являются многочленами, приведите к стандартному виду и определите их степень:

а) $7,5xy^3-5,5xy\cdot 2y^2+3,5xy^2\cdot y$; б) $\dfrac{3a+6b-1}{2}$; в) $\dfrac{nm-n^2}{8k+1}$;

г) $3pq:9q^2+4p^2q:8p$; д) $\dfrac{2c^3d}{-8}-\dfrac{4c^2d^0}{16}+5.$

Задачи

1 (8). Вычислите:

а) $(-1)^{55}\cdot(-1)^{98}:\left((1)^{100}\cdot(-1)^{86}\right)$;

б) 100 · 99 · 98 · ... · (–98) · (–99) · (–100);

в) $\dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{48}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{13}:\left(\frac{1}{3}\right)^{39}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{37}:\left(-\frac{1}{3}\right)^{13}:\frac{1}{9}}$; г) $\dfrac{\left(\frac{1}{5}\right)^{3}\cdot\left(5^2\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2}}{\left(\frac{7}{3}\right)^{2}+\frac{3}{3^2}}$.

2 (4). Выполните умножение:

а) $-mn^2\cdot\left(-\dfrac{1}{3}mk\right)^3\cdot(-1,5mk)^2$; б) $\left(\dfrac{3}{4}c^{2n}d^n\right)^2\cdot\left(-1\dfrac{1}{3}c^2d^3\right)^n$.

3 (5). Упростите выражения:

а) $3^{5n}\cdot 4^{5n}:8^{5n}$; б) $\left(a^2\cdot(b^4\cdot ba^2)\cdot x^0y^2\right)^2$;

в) $\left(\dfrac{9c^3d^5}{24d^4}\right)^2, d\neq 0$; г) $\left(\dfrac{3x^my^n}{2y^kx^p}\right)^4, x\neq 0, y\neq 0.$

4 (4). Выполните действия:

а) $-p^2q\cdot\dfrac{4}{5}q+\left(-\dfrac{pq}{2}\right)^2-\left(-0,2pq^2\cdot\dfrac{1}{2}p\right)$; б) $4\left(c^{2n}d^n\right)^2+\left(-c^2d\right)^{2n}$;

5 (5). Упростите выражение:

а) $10a-b+3-(-3b-4)+(-4a-2b)$;

б) $-\left(2x^3-\frac{2}{3}xy+\frac{y^2}{6}\right)\cdot y-1\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}y\right)^3+1{,}5x(x^2y-\frac{10}{9}y^2);$

в) $(2m+n)(n-3k)(3k+n);$

г) $4c(d-2c)(d+3)+(-2d)(c-2d)(c+6).$

6 (10).Найдите:

а) $p(3)$, если $p(a)=2a(a-2)-(a^3-4a^2);$

б) $p(-2{,}1)$, если $p(t)=\frac{2t^2}{5}-3t\left(-0{,}2t+\frac{4}{9}t^2\right)+\frac{t}{3}\cdot\left(-2t\right)^2;$

в) $q(2;-2)$, если

$q(x;y)=(0{,}5x+y)(2x-3y-4)-2x(y+5)+1{,}5(4+2{,}5x)\left(\frac{2}{3}y-2x\right);$

г) $p(0)$, если $p(n)=t(n)\cdot q(n)+2r(n),\ t(n)=2n+1,\ q(n)=1-n,$
$r(n)=n^2-0{,}5n.$