Министерство образования и науки Российской Федерации
Физико-техническая школа республики Дагестан

МАТЕМАТИКА

Числовые и алгебраические выражения.

Математический язык. Математическая модель.

Задание №1 для 7 классов

(2017 – 2018 учебный год)

г. Москва, 2017

Математика: задание №1 для 7 классов (2017 – 2018 учебный год), 2017, 27 с.

Дата отправления задания - 6 ноября 2017 года

Учебно-методическое пособие состоит из теоретической части, в которой приводятся типовые примеры решения задач, и задания по пройденным темам для самостоятельного решения.

Составитель: Алтухов Д.А.

Введение

Дорогие ребята! В этом году вы начинаете обучение в Заочной физико-технической школе Республики Дагестан. В рамках обучения в Школе вам предлагаются три предмета: математика, физика и информатика. Вы можете обучаться как по всем трём предметам сразу, так и по некоторым из них.

Каждый предмет включает в себя 6 Заданий, которые будут присылаться вам в течение учебного года в виде брошюр (учебно-методических пособий), наподобие той, которая сейчас перед вами.

Пособиепо математике состоит из двух частей: в первой части приводится теория и примеры решения типовых задач на закрепление теоретического материала, во второй части вам предлагаются контрольные вопросы и задачи для самостоятельного выполнения. Решение Задания необходимо оформить в отдельной тетради и отправить для проверки в сроки, указанные на второй странице пособия. После проверки ваши тетради будут высылаться вам обратно вместе с брошюрой с решениями задач из Задания.

Приступая к работе с пособием, вначале следует внимательно прочитать теорию и разобраться с решением примеров. Рекомендуем прежде, чем ознакомиться с разобранными решениями, попытаться выполнить их самостоятельно. Затем приступайте к ответам на контрольные вопросы и решению задач. Если какое-либо задание вызывает сложности, обратитесь еще раз к теории и примерам – вероятно, там вы сможете найти ключ к решению.

Обратите внимание на оформлениерешений в присланных вам заданиях, а также в ваших учебниках и задачниках. Постарайтесь аккуратно оформлять ваши работы.

Мы очень надеемся, что поможем вам в изучении математики.

Желаем вам больших успехов в новом учебном году!

§1. Числовые и алгебраические выражения

Числовым выражением называется любая запись, составленная из чисел, знаков арифметических действий и скобок. Напомним, что основными арифметическими действиями являются “сложение”, “вычитание”, “умножение” и “деление”, которые обозначаются символами “ + ”, “ – ”, “ × ” или “ · ”, и “ : ”соответственно. Результаты выполнения этих действий называют терминами “сумма”, “разность”, “произведение”, “частное”. Также вы уже знакомы с таким действием, как возведение в степень, которое записывается в виде верхнего индекса (например, 2^4). Дробная черта обозначает деление выражения над ней на выражение, записанное под ней. Запятая используется для отделения целой и дробной частей у десятичных дробей; по обе стороны от запятой обязательно должны находиться цифры.

Если выполнить все действия в числовом выражении, то получится число, которое называется **значением числового выражения**. Отметим, что в случае, если какое-либо действие выполнить невозможно (например, деление на ноль, два арифметических знака подряд, неверная расстановка скобок и т.д.), то исходное выражение не является числовым. В таком случае говорят, что выражение **не имеет смысла**или **не определено**. Таким образом, у любого числового выражения есть значение.

Примеры числовых выражений:

$$(4 + 7) \cdot 2; \quad 3 + 0; \quad 2^5 - 1; \quad 100; \quad \frac{9-10}{4:3}; \quad 1{,}75 - (5{,}6 + 2).$$

Убедитесь, что данные выражения являются числовыми, выполнив соответствующие действия.

Примеры выражений, не имеющих смысла в рамках математики и не являющихся числовыми:

9(4+:8;   8:0+2;   54,+6;   ):-3.

Перевод числовых выражений на русский язык следует выполнять очень внимательно. Математические записи часто возможно прочитать различными способами. Главное, чтобы из слов и их порядка однозначно следовало исходное выражение. Например, по фразе “два плюс три умножить на четыре” непонятно, то ли это “$2 + 3\cdot 4$”, то ли “$(2 + 3)\cdot 4$”. В первом случае следует сказать “сумма числа два и произведения чисел три и четыре”, а во втором – “сумма чисел два и три, умноженная на число четыре”. Старайтесь говорить так, чтобы вас не могли понять неправильно.

Пример 1. Прочитайте выражение, используя термины “сумма”, “разность”, “произведение”, “частное” и найдите его значение:

а) $4 + 3{,}5$

б) $99 - (-2)$

в) $-9{,}3 : 6$

г) $\left(3\frac{2}{3}-2\frac{1}{2}\right)\cdot(18:3)$

Δ а)“Сумма четырех и трех целых пяти десятых”, или “Сумма числа четыре и числа три целых пять десятых”, или “Сумма четырех и трех с половиной”;$4 + 3{,}5=7{,}5$.

б) “Разность девяноста девяти и минус двух”; $99 - (-2)=101$;

в) “Частное чисел минус девять целых три десятых и шести”;

$-9{,}3:6= -1{,}55$;

г) “Произведение разности трех целых двух третьих и двух целых одной второй и частного восемнадцати и трех”:

$$\left(3\frac{2}{3}-2\frac{1}{2}\right)\cdot(18:3)=1\frac{1}{2}\cdot 6=7.$$ ▲

В математике часто встречаются выражения, содержащие буквы, вместо которых можно подставлять числа. Такие выражения называются **алгебраическими**, а буквы, которые в них используются, называют **переменными**. С подобными выражениями вы сталкивались, например, решая задачи с помощью уравнений. В таких случаях буква обозначала неизвестную величину. Правила расстановки знаков арифметических действий и скобок те же, что и для числовых выражений. Переменная не может обозначать только часть числа (например, дробнуючасть смешенной дроби, целую часть десятичной дроби, или какие-то отдельные разряды числа). При умножении переменных точку, обозначающую это действие, можно опускать.

Примеры алгебраических выражений:

$a + 2$; $(5 - a \cdot b)$; $\frac{x^3}{3+4\cdot y}$; $5xyz$.

Примеры записи алгебраических выражений, не имеющих смыслав рамках математики:

$y + - b$; $\frac{6+a}{x-}$; $c{+}{+}$; $d8))$

При подстановке всех переменных в алгебраическое выражение возможны дваслучая. В первомможно выполнить все арифметические действия и итоговое выражение оказывается числовым. Тогда эти значения переменных называются **допустимыми**, а значение полученного числового выражения называется **значением алгебраического выражения** при **заданных значениях переменных**. Во втором случае, если какое-либо действие произвести невозможно, то говорят, что данные значения переменных являются **недопустимыми**, а выражение **не имеет смысла**.

Пример 2. Найдите значение выражения $\frac{x-5}{x+2}$ при

а) $x = 0$; б) $x = 5$; в) $x = -2$.

Δ а) При $x = 0$выражение принимает вид $\frac{0-5}{0+2} = \frac{-5}{2} = -2{,}5$;

б) При $x = 5$ выражение принимает вид $\frac{5-5}{5+2} = \frac{0}{7} = 0$;

в) При $x = -2$ выражение принимает вид $\frac{-2-5}{-2+2} = \frac{-7}{0}$; данное выражение не является числовым, так как деление на ноль *не определено*. В таких случаях принято говорить, что значение выражения*не определено*, или *выражение не имеет смысла* при заданном значении переменной. ▲

Пример 3. Дано выражение $\frac{a+3\cdot b}{(a-2)\cdot b}$.

а) Найдите его значение при $a = 3$, $b = 5$;

б) Найдите его значение при $a = 0$;

в) Определите, при каких значениях переменных данное выражение не имеет смысла.

∆ а) При $a = 3$, $b = 5$: $\frac{a+3\cdot b}{(a-2)\cdot b} = \frac{3+3\cdot 5}{(3-2)\cdot 5} = \frac{18}{5} = 3{,}6$

Ответ: 3,6.

б) Хотя значение второй переменной не дано, всё-таки попробуем посчитать значение выражения: приa=0 имеем

$\frac{a+3\cdot b}{(a-2)\cdot b} = \frac{0+3\cdot b}{(0-2)\cdot b} = \frac{3b}{-2b}$. Для дальнейшего упрощения можно сократить дробь на b.Но если вспомнить, что сокращение дроби – это деление числителя и знаменателя на одинаковое число, то сразу станет ясно, что так можно делать, только если $b \neq 0$.При всех отличных от нуля значений b дробь сокращается на b,и значение выражения оказывается равным –1,5. Если же $b = 0$, то значение выражения не определено, так как в знаменателе дроби окажется ноль. В данном примере ответ будет следующий:

Ответ:

при $b \neq 0$ значение выражения равно –1,5;

при $b = 0$ выражение не имеет смысла.

в) В дальнейшем вам часто придется выяснять, при каких значениях переменных выражение не имеет смысла. Для этого следует вспомнить, какие действия в математике не определены. В данном примере таким действием является деление на ноль, если он появится в знаменателе дроби.

То есть нельзя допустить, чтобы выражение $(a-2)\cdot b$оказалось равным нулю.В таком случаепоступают следующим образом: записывают условие, при котором выражение не имеет смысла, решают получившееся уравнение или неравенство, а потом говорят, что найденные значения недопустимы.

Следуя такой логике, запишем: $(a-2)\cdot b = 0$

Произведение будет равно нулю, если хотя бы один из сомножителей будет равен нулю, поэтому либо $a-2=0$ (или $a=2$), либо $b=0$. Найденные значения переменных являются недопустимыми, так как при них знаменатель дроби обращается в ноль. Поэтому ответ к данной задаче следующий:

Ответ: данное выражение не имеет смысла при $a = 2$ или $b = 0$.

Комментарий: *именно "или", а не "и". Переменным не обязательно одновременно быть равными этим значениям. Достаточно, чтобы хотя бы одна из переменныхоказаласьравна соответствующемучислу, тогда весь знаменатель обратится в ноль и выражение перестанет иметь смысл.* ▲

Пример 4. Определите, при каких значениях переменных выражение не имеет смысла:

а) $(6a + b)\cdot(b - a)$;

б) $(7 - x) : (2x + 3)$;

в) $\dfrac{c}{c(c-1)(d+2)}$.

Δ а) Ни при каких значениях a и b не возникает действий, результат которых не определен, так как складывать, вычитать и умножать можно любые числа. Поэтому данное выражение имеет смысл при любых значениях переменных.

Ответ: Выражение имеет смысл при любых значениях переменных.

б) Здесь присутствует деление на выражение $2x + 3$, поэтому оно не может быть равным нулю. Запишем: $2x + 3=0$.

Решая это уравнение, найдем $x = -1{,}5$. При этом значении исходное выражение не имеет смысла.

Ответ:–1,5.

в) Здесь есть деление на выражение $c(c - 1)(d + 2)$, оно не должно принимать значение 0. Запишем: $c(c - 1)(d + 2)=0$.

Произведение будет равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю. То есть, при: $c = 0$,$c - 1= 0$ или $d + 2 = 0$; или: $c = 0$, $c = 1$ или $d = -2$.При найденных значениях переменных исходное выражение не имеет смысла.

Ответ: $c = 0$, или $c = 1$, или $d = -2$.

Пример 5. Найти значение выражения $x+\dfrac{(3x^2-2y)(1-y)}{5x(y-1)}$

при следующих условиях:

а) $x = 1$, $y = 2$;

б) $x = 0$, $y = 0$;

в) $x = 0{,}2$, $y = 3$.

Δ а) При $x = 1, y = 2$:

$$x+\frac{(3x^2-2y)(1-y)}{5x(y-1)}=1+\frac{(3\cdot 1^2-2\cdot 2)\cdot(1-2)}{5\cdot 1\cdot(2-1)}=1,2$$

Ответ: 1,2.

б) Сразу замечаем, что знаменатель дроби равен нулю, так как один из его множителей $-x$ – равен нулю. Поэтому делаем вывод, что при данных значениях переменных исходное выражение не определено.

Ответ: при данных значениях переменных выражение не имеет смысла.

в) При $x = 0{,}2, y = 3$: $x+\dfrac{(3x^2-2y)(1-y)}{5x(y-1)}=$

$$=0{,}2+\frac{(3\cdot 0{,}2^2-2\cdot 3)\cdot(1-3)}{5\cdot 0{,}2\cdot(3-1)}=6{,}08.$$

Ответ: 6,08. ▲

§2. Математический язык

Математический язык в чём-то похож на наш обычный язык – в нем есть аналоги существительных – переменные и числа, аналоги глаголов – арифметические действия.Но у математического языка есть и свои особенности. Выражения, записанные на математическом языке, как правило, выглядят прозрачнее, короче и яснее, чем на обычном.

Часто перевод словесного выражения на математический язык можно осуществить несколькими равнозначными с математической точки зрения способами. Например, условие “число x на 1 больше числа y” можно записать как $x = y + 1$, $x - 1 = y$ или $x - y = 1$.

В качестве примеров перевода на математический язык приведем известные вам законы арифметики.

1. Переместительный (коммутативный) закон: “От перемены мест слагаемых сумма не меняется”. Если слагаемые обозначить за x и y, то данное правило будет выглядеть следующим образом:

$x + y = y + x$.

Как видим, на математическом языке это высказывание оказалось намного короче и нагляднее.

2. Распределительный (дистрибутивный) закон: “Произведение некоторого числа на сумму двух других чисел равно сумме произведения первого числа на второе и произведения первого числа на третье”. Путь первое число обозначено как a, второе как b, третье как c. Тогда данное правило будет выглядеть следующим образом:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

3. Правило сложения дробей с равными знаменателями: “Сумма дробей с равными знаменателями равна дроби с числителем, равным сумме числителей исходных дробей, и тем же знаменателем”. Если обозначить за t числитель первой дроби, за p – числитель второй, а за r – их знаменатель, то это утверждение будет выглядеть так:

$$\frac{t}{r} + \frac{p}{r} = \frac{t+p}{r}.$$

Пример 6. Прочитайте высказывания (переведите с математического языка):

а) $a + b \cdot 2$; б) $(m + n)\cdot 2$; в) $(z + t)^2$; г) $(x – 3) : (y + 1)$;

д) $p^2 – q^3$; е) $(a + 3y)^3$.

Ответ:

а) Сумма числа a и удвоенного числа b;

б) Удвоенная сумма чисел m и n;

в) Квадрат суммы чисел z и t;

г) Частное разности x и трех и суммы y и единицы;

д) Разность квадрата числа p и куба числа q;

е) куб суммы числа a и трех y.

Комментарий: выражения 2x, 7y, 20z принято читать не как произведение двух и x, семи и y, двадцати и z, а просто как два x, семь y, двадцать z.

Пример 7. Переведите высказывание на математический язык:

а) Разность чисел a и b;

б) Сумма числа x и утроенного числа y;

в) Разность квадратов чисел z и a;

г) Частное семи x и двух a.

Ответ:

а) $a - b$;

б) $x + 3y$;

в) $z^2 - a^2$;

г) $\frac{7x}{2a}$.

Пример 8. Переведите утверждение на математический язык:

а) Сумма чисел a и b равна 8;

б) Разность трех x и пяти y равна 6;

в) Частное от деления числа c и удвоенного числа d равна 1;

г) Число m на 10 меньше числа n.

Ответ:

а) $a + b = 8$;

б) $3x - 5y = 6$;

в) $c : (2d) = 1$;

г) $m = n - 10$.

§3. Математическая модель и математическое моделирование

Для того чтобы описывать процессы и ситуации окружающего мира, применяется **математическое моделирование**. Данный метод состоит в том, чтобы выделить наиболее значимые свойства предметов, процессов илиявлений, установить закономерности, которым они подчиняются, и записать их на математическом языке. В результате получается **математическая модель**.При этом используются не сами объекты, а величины, которые их количественно характеризуют. Например, движение автомобиля описывают с помощью его скорости, времени движения и пройденного пути; работу мастера – с помощью производительности, затраченного времени и количества произведенных деталей и т.д.

Для составления математической модели некоторой ситуации, описанной текстом,нужно выделить в этом тексте параметры, которые могут быть выражены числами, и установить связь между ними.

Пример 9. Составьте математическую модель заданной ситуации:

а) Мальчиков в классе на пять больше, чем девочек;

б) Скорость автомобиля в два раза больше скорости мопеда;

в) Площадь прямоугольника равна произведению его соседних сторон;

г) Мастер за два дня изготавливает столько же деталей, сколько ученик за три дня;

д) Скорость катера по течению на 12 км/ч больше его скорости против течения;

е) Число жильцов в первом подъезде дома составляет 30 процентов от числа жильцов второго и третьего подъездов;

ж) Сумма углов треугольника равна 180^0;

з) За 300 рублей можно купить столько же ручек, сколько можно купить карандашей за 200 рублей.

Δ а) Если за m обозначить число мальчиков в классе, а за n – число девочек, то математическая модель будет выглядеть так:

$m = n + 5$;

б) Если обозначить скорость автомобиля за v, а скорость мопеда за u, то условие можно записать в виде $v = 2u$;

в) Пусть соседние стороны прямоугольника равны a и b, а площадь равна S, тогда $S = a \cdot b$;

г) Обозначим за x производительность мастера (количество произведенных деталей за один день), а за y – производительность ученика. Тогда исходное условие можно записать в виде $x \cdot 2 = y \cdot 3$, или $2x = 3y$;

д) Если обозначить скорость катера как v, скорость течения реки как u, то скорость катера по течению равна $v + u$, а скорость против течения равна $v – u$. Математическую модель можно составить следующим образом: $v + u = v – u + 12$;

е) Пусть x, y и z–число жильцов первого, второго и третьего подъездов соответственно. На математическом языке условие будет выглядеть так: $x = \frac{30}{100} \cdot (y + z)$;

ж) Если углы треугольника обозначить как a, b и c, то условие можно записать как $a + b + c = 180^0$;

з) Обозначим за p цену ручки, а за q цену карандаша. Тогда математическая модель заданной ситуации примет вид

$$\frac{300}{p} = \frac{200}{q}. \quad ▲$$

§4. Применение математического моделирования к решению задач

Для решения текстовых задач применяют математическое моделирование. Этот процесс состоит из нескольких этапов:

1. Построение математической модели.

Вначале текст задачи переводят на математический язык. Для этого определяют значимые для задачи величины, устанавливают взаимосвязи между ними, вводят буквенные обозначения, составляют математические соотношения в виде уравнений или неравенств. Обозначения стоит выбирать таким образом, чтобы в результате полученные соотношения принимали наиболее простой вид.

2. Работа с математической моделью.

На втором этапе решают задачу, полученную после составления математической модели.

3. Практический вывод

Результат решения математической задачи нужно обязательно проанализировать и понять его смысл. Необходимо также подумать, может ли в действительности данная величина принимать найденное значение. Например, число человек в автобусе обязательно должно быть натуральным, а время движения автобуса не может быть отрицательным.

Если все же получился “невозможный” ответ, то следует разобраться, в чем дело – некорректное условие задачи, ошибка в решении, а может ответ обладает дополнительным смыслом. Например, отрицательное время может означать, что некоторое событие произошло до того момента, который считается начальным; отрицательная пропускная способность трубы может говорить о том, что вода через нее не втекает, а вытекает.

Решим несколько задач, выделяя этапы математического моделирования.

Пример 10. На первой полке книг в два раза больше, чем на второй. Если с первой полки переставить на вторую шесть книг, то их количество на обеих полках окажется равным. Сколько всего книг находится на двух полках?

Δ 1. Обозначим число книг на второй полке за x. Тогда их число на первой полке будет равно $2x$.

После перестановки шести книг их количество станет равным $2x - 6$ и $x + 6$ на первой и на второй полках соответственно.

Теперь запишем, что их количество выровнялось:

$x + 6 = 2x - 6$.

Это уравнение является математической моделью данной задачи.

2. Решим полученное уравнение:

$x + 6 = 2x - 6$;

$x = 12$.

3. Теперь вспомним, что мы обозначали за x и что требуется найти. Данной переменной мы обозначили число книг на второй полке. В задаче просили найти общее количество книг. Оно равно сумме книг на первой и второй полках. Запишем это выражение и посчитаем его значение при найденном x:

$2x + x = 3x = 3 \cdot 12 = 36$ (книг). Это и есть наш ответ в данной задаче.

Выполним проверку:

Если на второй полке 12 книг, то на первой, по условию, в два раза больше, то есть 24. Далее после перекладывания шести книг с первой полки на вторую на каждой останется по 18 книг, то есть равное количество. Проверка прошла успешно.

Ответ:36 книг.▲

Пример 11. Один из углов треугольника в два раза меньше другого угла, а третий равен сумме двух других углов. Найдите все углы этого треугольника.

Δ 1. Обозначим за x меньший угол треугольника. Тогда второй угол равен $2x$, а третий равен их сумме $x + 2x = 3x$.

Известно, что сумма углов треугольника равна 180^0. Запишем это на математическом языке:

$x + 2x + 3x = 180^0$.

2. Решим полученное уравнение:

$6x = 180^0$; $x = 180^0 : 6 = 30^0$.

3. Вспоминаем смысл переменной и вопрос задачи. Первый угол равен $x = 30^0$. Второй равен $2x = 2 \cdot 30^0 = 60^0$. Трений угол этого треугольника равен $30^0 + 60^0 = 90^0$.

Выполним проверку:

Убеждаемся, что второй угол действительно в два раза больше первого, а третий равен их сумме. Посчитаем сумму всех углов: $30^0 + 60^0 + 90^0=180^0$ – такой и должна получиться сумма углов треугольника. Проверка прошла успешно.

Ответ: 30^0, 60^0, 90^0.▲

Пример 12. Сумма трех подряд идущих натуральных чисел в шесть раз больше разности большего и меньшего из них. Найдите эти числа.

Δ 1. Пусть меньшее число равно n, тогда следующее за ним равно $n + 1$, а третье число, являющееся наибольшим из них, равно $n + 2$.

Используя математический язык, запишем, что их сумма в шесть раз больше разности большего и меньшего:

$n + (n + 1) + (n + 2) =6 \cdot ((n + 2) - n)$.

2. Решим данное уравнение:

$n + n + 1 + n + 2 = 6 \cdot (n + 2 - n)$;

$3n + 3 = 6 \cdot 2$;

$n = 3$.

3. Мы получили, что меньшее число равно 3. Тогда следующее число равно $3 + 1 = 4$, а третье равно $3 + 2 = 5$.

Выполним проверку:

Сумма полученных трех чисел равна $3 + 4 + 5=12$, разность большего и меньшего $5 - 3 = 2$. Убеждаемся, что $12 = 6 \cdot 2$. При этом все три числа идут подряд и являются натуральными, как и требуется в условии. Проверка прошла успешно.

Ответ: 3, 4, 5. ▲

Пример 13. Докажите, что произведение двух подряд идущих четных чисел на один меньше квадрата нечетного числа, находящегося между ними.

Δ 1. Четные числа – это целые числа, которые делятся на 2 без остатка. Такое число можно представить в виде $2n$, где n – целое число.

Обозначим первое четное число за $2n$. Тогда второе четное число равно $2n + 2$, а нечетное число между ними равно $2n + 1$.

Запишем на математическом языке разность квадрата нечетного числа и произведения четных чисел:

$(2n + 1)^2 - 2n \cdot (2n + 2)$.

2. Упростим данное выражение, используя законы арифметики:

$$(2n + 1)^2 - 2n \cdot (2n + 2) = (2n + 1) \cdot (2n + 1) - 2n \cdot 2n - 2n \cdot 2 =$$

$$= 2n \cdot 2n + 2n \cdot 1 + 1 \cdot 2n + 1 \cdot 1 - 4n^2 - 4n = 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 4n = 1.$$

3. Мы получили, что данная разность равна 1. Это и значит, что вычитаемое на 1 меньше, чем уменьшаемое, а в данном случае произведение двух подряд идущих четных чисел на один меньше квадрата нечетного числа, находящегося между ними.▲

Пример 14. За пять дней мастер и ученик вместе изготовили 255 деталей. Сколько деталей каждый из них изготавливал каждый день, если мастер производил за один день в два раза больше деталей, чем ученик.

Δ 1. Пусть x – производительность ученика. Тогда производительность мастера равна $2x$.

На всякий случай напомним, что производительностью называется работа, производимая в единицу времени, в данном случае – число деталей, производимых за один день.

При совместной работе общая производительность работников равна сумме их производительностей. Поэтому общая производительность мастера и ученика равна $x + 2x$ – столько деталей они изготавливали ежедневно. Тогда за пять дней они произведут в 5 раза больше деталей. Согласно условию, их количество равно 255. Теперь составим уравнение:

$5 \cdot (x + 2x) = 255.$

2. Решим это уравнение:

$5 \cdot 3x = 255;$

$3x = 51;$

$x = 17.$

3. Мы нашли, что ученик производил 17 деталей в день. Тогда производительность мастера составляет $2 \cdot 17 = 34$ детали в день.

Выполним проверку:

Вместе мастер и ученик в день изготовят 17 + 34 = 51 деталь, а за пять дней $51 \cdot 5 = 255$ деталей, это значение совпадает с заданным в условии количеством деталей. При этом оба числа натуральные, что соответствует здравому смыслу. Проверка прошла успешно.

Ответ: 17 деталей и 34 детали. ▲

Пример 15. Из пункта А в пункт Б выехал автобус. Одновременно из пункта Б в пункт А выехал автомобиль, скорость которого в 1,5 раза больше скорости автобуса. Найдите скорость автомобиля, если встреча произошла спустя 4 часа после выезда, а расстояние между А и Б равно 450 км.

∆ 1. Обозначим скорость автобуса за v. Тогда скорость автомобиля составит $1{,}5v$.

При движении навстречу друг другу скорость сближения равна сумме скоростей движущихся объектов. Поэтому скорость сближения автомобиля и автобуса равна $v + 1{,}5v$.

Начальное расстояние между автомобилем и автобусом равно скорости сближения, умноженной на время от начала движения до встречи. Переводя это утверждение на математический язык, получаем следующее уравнение:

$(v + 1{,}5v) \cdot 4 = 450.$

2. Решаем получившееся уравнение:

$2{,}5v \cdot 4 = 450;$

$10v = 450;$

$v = 45$.

3. Мы нашли, что скорость автобуса равна 45 км/ч. Вывод о том, что скорость получена в километрах в час, делаем из того, что расстояние в условии дано в километрах, а время в часах. Тогда скорость автомобиля равна $45 \cdot 1{,}5 = 67{,}5$ км/ч.

Выполним проверку:

Скорость сближения составит $45 + 67{,}5 = 112{,}5$ км/ч, тогда начальное расстояние между автомобилем и автобусом равно $112{,}5 \cdot 4 = 450$ км, что согласуется с условием задачи. Проверка прошла успешно.

Ответ: 67,5 км/ч.▲

Пример 16. От пристани А в сторону пристани Б отправился плот. Через три часа после этого от пристани Б в сторону пристани А отплыл теплоход и через два часа произошла их встреча с плотом. Известно, что скорость теплохода в стоячей воде равна 25 км/ч, а расстояние между пристанями равно 62 км. Найдите скорость течения реки.

Δ Скорость плота равна скорости течения реки. Так как плот плывет от А к Б, то и течение направлено в эту же сторону. Значит, теплоход движется против течения реки.

Пусть v – скорость течения. Тогда скорость теплохода против течения равна $25 - v$. До встречи с теплоходом плот двигался $2 + 3 = 5$ часов, поэтому расстояние, пройденное плотом от момента начала движения до момента встречи, равно $v \cdot 5$. Теплоход двигался два часа против течения, его путь равен $(25 - v) \cdot 2$. Используя математический язык, запишем, что сумма путей плота и теплохода равна расстоянию между пристанями:

$v \cdot 5 + (25 - v) \cdot 2 = 62$.

2. Решаем данное уравнение:

$5v + 25 \cdot 2 - 2v = 62;$

$3v = 12; \quad v = 4.$

3. Мы получили, что скорость течения реки равна 4 км/ч. Вывод о размерности скорости мы сделали по тем же соображениям, что и в предыдущем примере.

Выполним проверку:

Путь плота за 5 часов составит $4 \cdot 5 = 20$ км. Скорость теплохода против течения равна $25 - 4 = 21$ км/ч, за два часа он проплывет $21 \cdot 2 = 42$ км. Сумма расстояний, пройденных плотом и теплоходом, равна $20 + 42 = 62$ км, что равно расстоянию между пристанями, данному в условии. Проверка прошла успешно.

Ответ: 4 км/ч. ▲

Пример 17. Две трубы, работая одновременно, наполняют резервуар за семь часов двадцать минут. Пропускная способность первой трубы на 40% выше, чем у второй. Определите, за какое время одна вторая труба наполнит данный резервуар.

Δ 1. Обозначим за x пропускную способность второй трубы. Тогда пропускная способность первой равна $x + \frac{40}{100} \cdot x = 1{,}4x$.

При одновременной работе суммарная пропускная способность равна $x + 1{,}4x = 2{,}4x$.

Примем весь объем резервуара за 1. Три часа двадцать минут переведем в часы: 3ч 20мин = 3ч + $\frac{20}{60}$ч = $3\frac{1}{3}$ч. Тогда условие задачи можно записать в следующем виде:

$$(x + 1{,}4x) \cdot 3\frac{1}{3} = 1.$$

2. Решим полученное уравнение:

$$2{,}4x = 1:\ 3\frac{1}{3};$$

$$x = \frac{3}{10}:2{,}4 = \frac{1}{8}.$$

3. Мы нашли пропускную способность второй трубы. Она выражается в долях резервуара, наполняемых за один час. Время, за которое она наполнит резервуар, равно отношению его объема к пропускной способности трубы: $1:\frac{1}{8} = 8$ часов.

Выполним проверку:

Пропускная способность первой трубы равна $\frac{1}{8}\cdot 1{,}4 = \frac{7}{40}$.

Общая пропускная способность двух труб равна $\frac{1}{8} + \frac{7}{40} = \frac{3}{10}$. Тогда за $3\frac{1}{3}$ ч наполнится $\frac{3}{10}\cdot 3\frac{1}{3} = 1$, то есть весь резервуар. Проверка прошла успешно.

Ответ: 8 часов. ▲

Контрольные вопросы

1 (4). Найдите средиданных записей числовые выражения и найдите их значения. Объясните, почему остальные выражения не являются числовыми.

а) $(10{,}4 - 13{,}9)\cdot(7:2{,}5+5{,}7)$;

б) $\left(\left(11\frac{2}{3}+(5{,}8-1)\cdot\frac{8}{5}-3:4\right)\cdot 2\right.$;

в) $-1\frac{2}{3}-\frac{2{,}6+3{,}4}{-1-2}$;

г) $\frac{3{,}9\cdot 3^3-1{,}3}{2{,}1^2+(1{,}7-1{,}1)^2-0{,}9\cdot 5{,}3}$.

2 (5). Прочитайте и запишите алгебраические выражения на русском языке:

а) $2a + 3b$;

б) $x^2 - (2y)^3$;

в) $(7 + a) : (9 - c)$;

г) $(m - 3n)\cdot k^2$;

д) $\frac{p-4q}{2x+y}$.

3 (4). Переведите выражения с русского языка на математический:

а) Разность числа x и утроенного числа a;

б) Квадрат разности двух b и куба пяти c;

в) Разность квадрата суммы x и 3 и куба двух z;

г) Частное суммы квадратов p и четырех q и разности трех и удвоенного числа d.

4 (3). Найдите значение выражения $\frac{-2a+3\cdot(a-b)^2}{a(b+3)-4}$ при

а) $a = 1$, $b = 0$;

б) $a=\frac{2}{3},\ b=-1\frac{1}{3}$;

в) $a = 2{,}5$, $b = -1{,}4$.

5 (4).Запишите утверждение на математическом языке:

а) Число a в семь раз больше числа b;

б) Квадрат числа m в четыре с половиной раза меньше куба числа n;

в) Частное числа y и трех x на три целых шесть десятых меньше квадрата двух y;

г) Сумма квадратов пяти p и десяти q на один меньше куба суммы числа p и квадрата q.

6 (4). Составьте математическую модель ситуации:

а) Число уроков в понедельник на один больше, чем во вторник;

б) Скорость автобуса в полтора раза меньше скорости автомобиля;

в) Мастер за четыре часа изготовил на пять деталей больше, чем

ученик за шесть часов;

г) Периметр прямоугольника равен 10.

Задачи

1 (4). Найдите значение числового выражения:

$$\frac{\left(3{,}2-5\dfrac{1}{2}\right)^2-0{,}3^2}{3\dfrac{4}{5}:(0{,}19\cdot 30)+12\dfrac{3}{8}:\left(1\dfrac{1}{2}\right)^3}.$$

2 (4). Найдите значение выражения

$$\left(\frac{m+n}{m-1}-\left(\frac{n}{m}\right):\frac{6m-5}{6n+5}\right)\cdot(3-2mn)^2$$

при $n=\dfrac{2}{3}$, $m = 1{,}5$.

3 (3). Найдите значения переменных, при которых данное выражение не имеет смысла:

$$\frac{x^3-2xy^2+4x}{5xy\left(\dfrac{1}{x}-2\right)\left(\dfrac{y}{3}-7\right)}.$$

4 (3). В первой стопке тетрадей в три раза больше, чем во второй. Если из первой стопки переложить во вторую двенадцать тетрадей, то в первой стопке окажется на шесть тетрадей меньше, чем во второй. Найдите, сколько тетрадей было в каждой стопке вначале.

5 (3). Катер плыл по течению реки два часа, затем полчаса по озеру, а потом час против течения реки. Общее расстояние, пройденное катером, равно 89 км. Найдите скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

6 (4). Первая труба пропускает в полтора раза больше воды, чем вторая. Если первая труба будет работать два часа, а затем вторая один час, то наполнился $\frac{2}{5}$ бассейна. Найдите, за какое время две трубы вместе наполнят бассейн.

7 (3). Один из углов треугольника на 40^0 больше другого, а третий угол в два раза меньше суммы двух других углов. Найдите углы этого треугольника.

8 (5). Докажите, что квадрат натурального числа на единицу больше произведения двух соседних чисел.