**Министерство обороны Российской Федерации**
**Заочная кадетская физико-математическая школа (КФМШ)**

# ФИЗИКА

## 10 класс

2018–2019 учебный год

Задание № 1

# Кинематика

Москва, 2018

ББК 22.3
Ч584
УДК 53(075)

**ФИЗИКА. 10 класс. Задание № 1: Кинематика.** — М.: Заочная кадетская физико-математическая школа, 2018. — 31 с. Методическое пособие состоит из теоретической части, содержащей методику решения задач, а также заданий, предлагаемых для решения в классе, и задач для самостоятельного решения. Для учащихся и педагогов соответствующих кружков КФМШ.

**Рекомендуемый срок выполнения задания — 10 декабря 2018 г.**

Авторы-составители задания:
методисты КФМШ Алтухов Д.А., Щавлев В.В.

В пособии также использованы методические материалы Чугунова А.Ю.

Рецензент: к.ф.-м.н. Чивилёв В.И.

Редактор, оператор набора и верстки
методист КФМШ А. К. Розанов
kfmsh@mail.ru

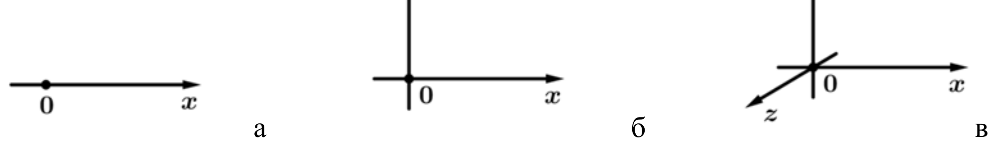
## Введение

Уважаемые учащиеся! В этом году вы приступаете к обучению в Кадетской физико-математической школе, или сокращённо – КФМШ. Занятия в Школе проводятся в 10 и 11 классах по двум предметам: физике и математике. В 10 классе по физике вам предлагается изучить 6 заданий: Кинематика; Динамика; Импульс, работа, энергия. Законы сохранения импульса и энергии; Молекулярная физика и термодинамика; Электростатика; Постоянный электрический ток. В одиннадцатом классе вам будет представлено также 6 заданий: Электромагнетизм; Механические и электромагнитные колебания; Геометрическая оптика; Волновая оптика; Корпускулярно-волновой дуализм. Фотоэффект и давление света; Атомная и ядерная физика. В целом, тематика заданий совпадает со школьной программой по физике.

Первая методичка в 10 классе посвящена изучению различных видов движения. Начнём освоение данного материала с обсуждения основных понятий.

### § 1. Система отсчёта

*Механика* – раздел физики, изучающий механическое движение тел. В свою очередь, *механическое движение* – изменение положения тела или его частей в пространстве относительно других тел с течением времени. *Основной задачей механики* является определение положения тела в любой момент времени. Для этого нам необходимо ввести *систему отсчёта*: тело отсчёта, связанную с ним систему координат и прибор для измерения времени. *Телом отсчёта* называется тело, относительно которого рассматривается изучаемое движение. Например, дерево на дороге можно принять за тело отсчёта, относительно которого будет рассматриваться движение проходящего мимо пешехода. Можно задать различные системы координат, связанные с телом отсчёта: прямоугольную, сферическую и даже цилиндрическую. Обычно в механике задаётся прямоугольная (декартова) система координат, а количество осей и их направление выбираются из соображений удобства. Например, если рассматривается движение тела вдоль прямой, то вводят одну координатную ось. Если движение тела происходит в плоскости, то вводится двумерная система координат, а если в пространстве, то трёхмерная (рис. 1.1).



а б в

Рис. 1.1. Декартовы прямоугольные системы координат: одномерная (а), двумерная (б) и трёхмерная (в).

## § 2. Физические модели

Реальные движения тел зачастую довольно сложны и при их изучении стараются пренебречь несущественными для рассмотрения деталями. С этой целью в физике составляют упрощённую *модель* явления, позволяющую понять его основную суть, не отвлекаясь на второстепенные обстоятельства. Среди общепринятых физических моделей важную роль в механике играют модель материальной точки и модель абсолютно твёрдого тела.

*Материальная точка* – тело, размерами которого в данных условиях задачи можно пренебречь. Тогда можно считать, что вся масса тела сосредоточена в геометрической точке. Модель материальной точки применима, прежде всего, в случаях, когда размеры тела много меньше других характерных размеров в условиях конкретной задачи. Например, когда машина движется из Санкт – Петербурга в Москву, мы можем считать тело материальной точкой. Также, при движении Луны вокруг Земли, мы считаем Луну материальной точкой, а вот при посадке лунохода на лунную поверхность уже нет. Но не стоит ограничиваться лишь подобными ситуациями. Часто, когда тело движется поступательно, не вращаясь, его также можно считать материальной точкой независимо от размеров, формы и пройденного им пути.

*Абсолютно твёрдое тело* – это система, состоящая из совокупности материальных точек, расстояния между которыми в данных условиях задачи можно считать неизменными. Модель абсолютно твёрдого тела можно применять, когда в условиях рассматриваемой задачи деформации реального тела пренебрежимо малы. Например, вращающийся «волчок» или велосипедное колесо, катящееся по дороге, можно считать абсолютно твёрдым телом.

Таким образом, далее мы будем изучать механическое движение не самих реальных тел, а упомянутых выше моделей. В то же время там, где это необходимо, мы будем ради наглядности изображать на рисунках тела не в виде точек, а в виде объектов, геометрические размеры которых не равны нулю.

## § 3. Основные характеристики движения

Механику обычно делят на несколько разделов: кинематика, динамика, импульс, статика и гидростатика, работа и энергия, механические колебания и волны. В данном пособии мы более подробно остановимся на первом разделе. *Кинематик*а – раздел механики, изучающий различные виды движения тел без рассмотрения причин движения. Движение бывает прямолинейным и криволинейным, поступательным, вращательным и колебательным, равномерным и неравномерным. В дальнейшем мы поговорим об этом более подробно, а пока обсудим основные характеристики механического движения: перемещение, путь, скорость, ускорение и время.

### 3.1. Путь и перемещение

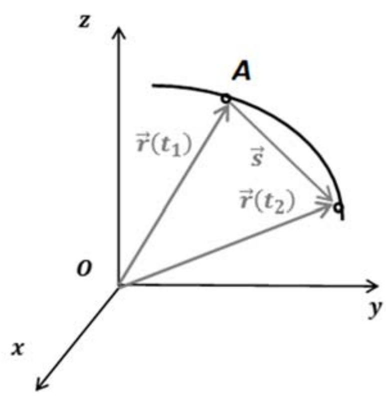


Рис. 3.1

Рассмотрим движение тела (материальной точки А) в пространстве. Её положение можно задать с помощью так называемого *радиус-вектора* $\vec{r}$, который представляет собой вектор, проведённый из точки О, соответствующей началу отсчёта выбранной системы координат, в интересующую нас точку А (рис. 3.1). В процессе движения материальной точки её радиус-вектор может изменяться как по модулю, так и по направлению, являясь функцией времени $\vec{r}=\vec{r}\left(t\right)$. Геометрическое место концов радиус-вектора $\vec{r}\left(t\right)$ называют *траекторией* точки А. В известном смысле траектория движения представляет собой след (явный или воображаемый), который «оставляет за собой» точка А после прохождения той или иной области пространства. Понятно, что геометрическая форма траектории зависит от выбора системы отсчёта, относительно которой ведётся наблюдение за движением точки.

*Путь* – это скалярная физическая величина, равная длине участка траектории, пройденного телом за промежуток времени $\Delta t$. Слово «*скалярная*» означает, что рассматриваемая физическая величина не имеет определённого направления в пространстве, в отличие от *векторной* величины, которая характеризуется и величиной, и направлением. Путь обычно обозначается буквами $L$ или $S$ и в системе СИ измеряется в метрах [м].

Пусть в процессе движения по некоторой траектории в выбранной системе отсчёта за промежуток времени $\Delta t$ материальная точка $A$ переместилась из начального положения *1* с радиус-вектором $\vec{r}_1=\vec{r}\left(t_1\right)$ в конечное положение 2 с радиус-вектором $\vec{r}_2=\vec{r}\left(t_2\right)$ (рис. 3.1). Приращение $\Delta\vec{r}$ радиус-вектора тела в таком случае равно:

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1 \qquad (3.1)$$

Вектор $\vec{S}=\Delta\vec{r}$, соединяющий начальное и конечное положения тела, называют *перемещением тела*. Модуль перемещения, как и путь, в системе СИ измеряется в метрах.

Траектория, путь и перемещение наглядно показаны на рисунке 3.2. Как видно из рисунка, путь и модуль перемещения не всегда совпадают. Ясно, что путь всегда больше или равен модулю перемещения тела.

Рис. 3.2

*Время* – скалярная физическая величина, характеризующая длительность процесса. Приборами для измерения времени являются часы, секундомер, метроном и другие устройства (рис. 3.3).


а б в

Рис. 3.3. Приборы для измерения времени: часы (а), секундомер (б), метроном (в)

### 3.2. Скорость

Познакомимся более подробно с понятием *скорости*. Скорость показывает, насколько быстро перемещается тело в пространстве. Скорость – векторная величина, в каждый момент времени она имеет определённое направление, которое совпадает с направлением касательной к точке траектории, в которой находится тело в данный момент. Скорость обычно обозначается символом $\vec{\upsilon}$ и в системе СИ измеряется в метрах в секунду [м/с]. Также скорость часто измеряют в километрах в час [км/ч]. Переведём 1 км/ч в м/с: $1\frac{км}{ч} = 1\cdot\frac{1000 м}{3600 с} = \frac{1}{3,6}\frac{м}{с}$. То есть, чтобы перевести км/ч в м/с, нужно разделить скорость, выраженную в км/ч, на 3,6. Чтобы перевести м/с в км/ч, нужно, наоборот, умножить выраженную в м/с скорость на 3,6.

**Пример 3.1.** Скорость первого объекта 15 м/с, а второго – 72 км/ч. Скорость какого объекта больше?

*Решение.* Чтобы ответить на данный вопрос, переведём скорости обоих тел в одинаковые единицы измерения. Например, переведём 72 км/ч в м/с: $\upsilon_2$ = $72\ км/ч = 72\cdot\frac{1}{3,6}$ м/с = 20 м/с. Можно, наоборот, 15 м/с перевести в км/ч:

$\upsilon_1 = 15$ м/с $= 15 \cdot 3{,}6$ км/ч $= 54$ км/ч. Таким образом, скорость второго объекта больше.

Отношение $\Delta\vec{r}/\Delta t$ называют *средней скоростью* (средним вектором скорости) $\vec{\upsilon}_{ср}$ тела за время $\Delta t$:

$$\vec{\upsilon}_{ср} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (3.2)$$

Вектор $\vec{\upsilon}_{ср}$ сонаправлен с вектором $\Delta\vec{r}$, так как $\Delta t$ – скалярная положительная величина. Предложенное определение средней скорости справедливо для любых значений $\Delta t$ кроме $\Delta t = 0$. Однако ничто не мешает брать промежуток времени сколь угодно малым, но отличным от нуля.

Для точного описания движения вводят понятие *мгновенной скорости,* то есть скорости в конкретный момент времени или в конкретной точке траектории. С этой целью промежуток времени $\Delta t$ устремляют к нулю. Вместе с ним будет стремиться к нулю и перемещение $\Delta\vec{r}$. При этом отношение $\Delta\vec{r}/\Delta t$ стремится к определённому значению. Величина, к которой стремится отношение $\Delta\vec{r}/\Delta t$ при стремлении $\Delta t$ к нулю, называется *мгновенной скоростью* $\vec{\upsilon}$:

$$\vec{\upsilon} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \text{ при } \Delta t \to 0 \qquad (3.3)$$

Теперь заметим, что чем меньше $\Delta t$, тем ближе направление $\Delta\vec{r}$ к направлению касательной к траектории в данной точке. Следовательно, вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории в данной точке в сторону движения тела. В дальнейшем там, где это не повлечёт недоразумений, мы будем опускать прилагательное «мгновенная» и говорить просто о *скорости* $\vec{\upsilon}$ тела (материальной точки).

Средней путевой скоростью $\upsilon_{ср}$ тела называют отношение пути S к промежутку времени t, в течение которого этот путь был пройден:

$$\upsilon_{ср} = \frac{S}{t} \qquad (3.4)$$

Определённая ранее средняя скорость $\vec{\upsilon}_{ср}$ и средняя путевая скорость отличаются друг от друга так же, как $\Delta\vec{r}$ отличается от S. Здесь слово «средняя» означает усреднение по времени.

**Пример 3.2.** Городской троллейбус утром вышел на маршрут, а через 8 часов, проехав в общей сложности 72 км, возвратился в парк и занял своё прежнее место на стоянке. Каковы средний вектор скорости $\vec{\upsilon}_{ср}$ и средняя путевая скорость $\upsilon_{ср}$ троллейбуса?

*Решение.* Поскольку начальное и конечное положения троллейбуса совпадают, то его перемещение $\Delta\vec{r} = 0$, следовательно, и $\vec{\upsilon}_{ср} = 0$. Но средняя путевая скорость троллейбуса не равна нулю: $\upsilon_{ср} = \frac{S}{t} = 9$ км/ч.

**Пример 3.3.** Велосипедист ехал из одного города в другой. Половину пути он проехал со скоростью $\upsilon_1$ = 12 км/ч. Далее половину оставшегося времени он ехал со скоростью $\upsilon_2$ = 5 км/ч, а затем до конца пути шёл пешком со скоростью $\upsilon_3$ = 3 км/ч. Определить среднюю скорость велосипедиста на всем пути.

*Решение.* Средняя скорость велосипедиста рассчитывается по формуле (3.4): $\upsilon_{ср} = \frac{S}{t} = \frac{S}{t_1 + t_2 + t_3}$, здесь $t_1 = \frac{S_1}{\upsilon_1} = \frac{S}{2\upsilon_1}$, $t_2 = t_3$ – времена прохождения участков пути. Суммарный путь на втором и третьем участках равен: $S_2 + S_3 = S - S_1 = \frac{S}{2}$. С другой стороны: $S_2 + S_3 = \upsilon_2 t_2 + \upsilon_3 t_3 = (\upsilon_2 + \upsilon_3) t_2$. Сопоставляя выражения для путей, получаем: $t_2 = t_3 = \frac{S}{2(\upsilon_2 + \upsilon_3)}$. Подставив выражения для времён в формулу для средней скорости, после преобразований получаем конечный ответ: $\upsilon_{ср} = \frac{2\upsilon_1(\upsilon_2 + \upsilon_3)}{2\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3}$ = 6 км/ч.

### 3.3 Ускорение

Движение тела принято характеризовать также *ускорением*, по которому судят об изменении скорости в процессе движения. Его определяют через отношение приращения вектора скорости $\Delta\vec{\upsilon}$ тела к промежутку времени $\Delta t$, в течение которого это приращение произошло. *Ускорением* тела называется величина, к которой стремится отношение $\Delta\vec{\upsilon}/\Delta t$ при стремлении к нулю знаменателя $\Delta t$:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} \text{ при } \Delta t \to 0 \qquad (3.5)$$

При уменьшении $\Delta t$ величина $\Delta\vec{\upsilon}$ также будет уменьшаться, а его ориентация будет приближаться к определённому направлению, которое принимается за направление вектора ускорения $\vec{a}$. Заметим, что ускорение направлено не в сторону самой скорости, а в сторону малого приращения скорости $\Delta\vec{\upsilon}$. В системе СИ единицей ускорения является *метр на секунду в квадрате* [м/с$^2$].

Таким образом, зная зависимость $\vec{r}(t)$, можно найти скорость $\vec{\upsilon}$ и ускорение $\vec{a}$ тела в каждый момент времени. В этой связи возникает и обратная задача о нахождении скорости и радиус-вектора по известной зависимости от времени ускорения $\vec{a}(t)$. Для однозначного решения этой задачи необходимо знать *начальные условия,* т. е. скорость $\vec{\upsilon}_0$ и радиус-вектор $\vec{r}_0$ тела в начальный момент времени $t = 0$.

## § 4. Способы описания движения

В кинематике существуют три способа аналитического описания движения материальной точки в пространстве: векторный, координатный и траекторный. Рассмотрим их, ограничившись случаем движения материальной точки на плоскости, что позволит нам при выборе системы отсчёта задавать лишь две координатные оси.

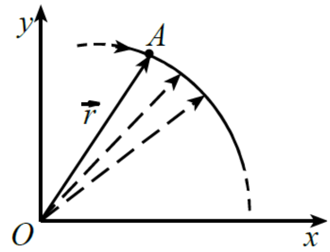


Рис. 4.1

1. *Векторный способ.* В этом способе, как уже было сказано выше, положение материальной точки А задаётся с помощью *радиус-вектора* $\vec{r}$ (рис. 4.1). В процессе движения материальной точки её радиус-вектор, скорость и ускорение в общем случае могут изменяться как по модулю, так и по направлению, являясь функциями времени: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t)$, $\vec{a} = \vec{a}(t)$ соответственно. Более подробно о векторном способе описания механического движения было сказано в предыдущем параграфе.

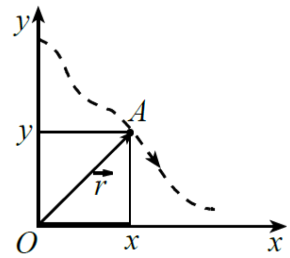


Рис. 4.2.

2. *Координатный способ.* В этом способе положение материальной точки *A* на плоскости в произвольный момент времени *t* определяется двумя координатами *x* и *y*, которые представляют собой проекции радиус-вектора $\vec{r}$ тела на оси *Ox* и *Oy* соответственно (рис. 4.2). При движении тела его координаты изменяются со временем, т. е. являются функциями *t*: $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Если эти функции известны, то они определяют положение тела на плоскости в любой момент времени.

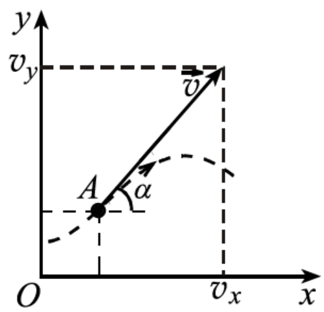


Рис. 4.3

В свою очередь, вектор скорости $\vec{\upsilon}$ можно спроецировать на оси координат и определить, таким образом, скорости $\upsilon_x$ и $\upsilon_y$ изменения координат тела (рис. 4.3). В самом деле, $\upsilon_x$ и $\upsilon_y$ будут равны значениям, к которым стремятся соответственно отношения $\Delta x/\Delta t$ и $\Delta y/\Delta t$ при стремлении к нулю промежутка времени $\Delta t$. Аналогично с помощью проецирования вектора $\vec{a}$ определяются ускорения $a_x$ и $a_y$ тела по направлениям координатных осей.

Таким образом, зная зависимости $x(t)$ и $y(t)$, можно найти не только положение тела, но и проекции его скорости и ускорения, а следовательно, модуль и направление векторов $\vec{\upsilon}$ и $\vec{a}$ в любой момент времени. Например, модуль вектора скорости будет равен $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$, а его направление может быть задано углом между этим вектором и любой осью координат. Так, угол α между вектором $\vec{\upsilon}$ и осью $Ox$ определяется отношением $\mathrm{tg}\alpha = \upsilon_y / \upsilon_x$. Аналогичными формулами определяются модуль и направление вектора $\vec{a}$.

Обратная задача – нахождение скорости и зависимостей $x(t)$ и $y(t)$ по заданному ускорению – будет иметь однозначное решение, если кроме ускорения заданы ещё и *начальные условия:* проекции скорости и координаты точки в начальный момент времени $t = 0$.

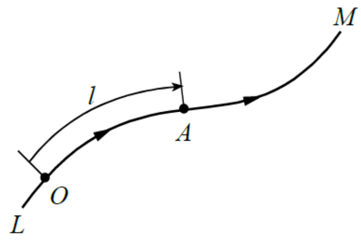


Рис. 4.4

*3. Траекторный способ.* Этот способ применяют тогда, когда траектория материальной точки известна заранее. На заданной траектории $LM$ (рис. 4.4) выбирают начало отсчёта – неподвижную точку $O$, а положение движущейся материальной точки $A$ определяют при помощи так называемой *дуговой координаты* $l$, которая представляет собой расстояние вдоль траектории от выбранного начала отсчёта О до точки А. При этом положительное направление отсчёта координаты $l$ выбирают произвольно по соображениям удобства, например, так, как показано стрелкой на рисунке 4.4. Движение тела определено, если известны его траектория, начало отсчёта О, положительное направление отсчёта дуговой координаты $l$ и зависимость $l(t)$.

## § 5. Относительность движения. Преобразования Галилея для перемещения, скорости и ускорения тела.

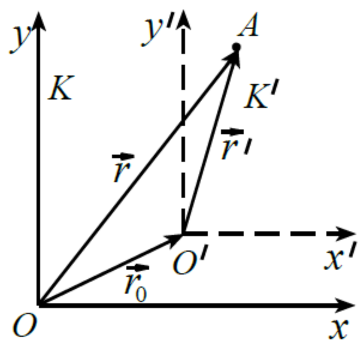


Рис. 5.1

В рамках классической механики перемещение, скорость и ускорение тела преобразуются по определённым правилам при переходе от одной системы отсчёта к другой. Пусть имеются две произвольные *системы отсчёта* $K$ и $K'$ (рис. 5.1). Известны скорость $\vec{\upsilon}\,'$ и ускорение $\vec{a}\,'$ тела (точки $A$) в $K'$ – системе.

Рассмотрим случай, когда $K'$ – система движется поступательно по отношению к K – системе, и определим значения скорости $\vec{\upsilon}$ и ускорения $\vec{a}$ тела в $K$ – системе. Если за малый промежуток времени $\Delta t$ тело (точка $A$) переместилось относительно $K'$ – системы на величину $\Delta\vec{r}\,'$, а $K'$ – система переместилась относительно $K$ – системы на $\Delta\vec{r}_0$, то из правила векторного сложения следует, что перемещение $\Delta\vec{r}$ тела относительно $K$ – системы будет равно:

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}\,' + \Delta\vec{r}_0 \qquad (5.1)$$

Разделив обе части этого равенства на $\Delta t$ и обозначив через $\vec{\upsilon}_0$ скорость $K'$ – системы относительно $K$ – системы, получим:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}\,' + \vec{\upsilon}_0 \qquad (5.2)$$

Рассуждая аналогично, найдём формулу преобразования ускорения:

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_0 \qquad (5.3)$$

Из формулы (4.3) вытекает важное следствие: при $\vec{a}_0 = 0$ ускорения $\vec{a}$ и $\vec{a}\,'$ равны. Иными словами, если система отсчёта $K'$ движется *поступательно* без ускорения относительно системы отсчёта $K$, то ускорения тела в обеих системах отсчёта будут одинаковы.

Переход из одной системы отсчёта в другую довольно часто применяется на практике и порой существенно облегчает решение некоторых физических задач, поэтому к данному приёму желательно привыкнуть и научиться умело его использовать.

Часто встречаются задачи, в которых два тела движутся независимо друг от друга в некоторой системе отсчёта и требуется определить какие-либо величины (перемещение, скорость), характеризующие движение одного тела относительно другого. В таких случаях, как правило, удобно перейти в систему отсчёта, связанную с тем телом, относительно которого рассматривается движение другого тела, и применить полученные выше формулы преобразований.

**Пример 5.1.** Из города А в город В с одинаковыми скоростями $\upsilon_1 = 60$ км/час выехали два поезда, причем один отправился через $t_1 = 10$ мин. после другого. Экспресс, идущий из города В в город А, повстречал эти поезда через $t_2 = 4$ мин. один после другого. Найти скорость экспресса.

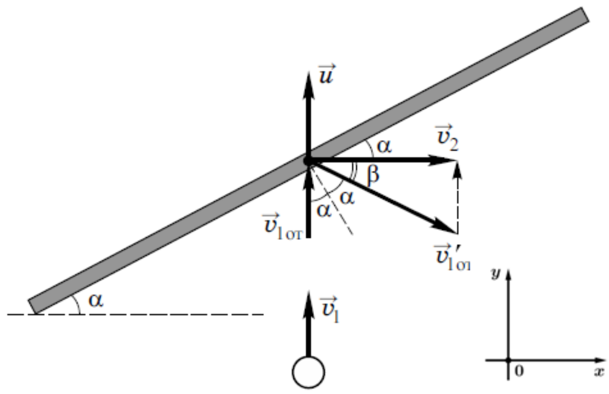
*Решение.* Найдём расстояние между поездами, выехавшими из пункта А: $S_1 = \upsilon_1 t_1$. Экспресс движется относительно поездов со скоростью $\upsilon_{от} = \upsilon_1 + \upsilon_2$. Тогда время проезда экспресса между поездами равно: $t_2 = \dfrac{S_1}{\upsilon_{от}} = \dfrac{\upsilon_1 t_1}{\upsilon_1 + \upsilon_2}$,

откуда получаем ответ: $\upsilon_2 = \upsilon_1 \left( \dfrac{t_1}{t_2} - 1 \right) = 60 \cdot \left( \dfrac{10}{4} - 1 \right)$ = 90 км/ч.

*Ответ:* $\upsilon_2 = \upsilon_1 \left( \dfrac{t_1}{t_2} - 1 \right)$ = 90 км/ч.

**Пример 5.2.** Массивная плита движется вертикально вверх со скоростью 3 м/с. Мяч, брошенный вертикально вверх, нагоняет плиту, ударяется упруго о плиту и отскакивает горизонтально. Поверхность плиты наклонена к горизонту под углом α, тангенс которого равен 0,5. Найти скорость мяча относительно земли сразу после удара. *(Физтех, 2017, онлайн этап)*

*Решение.* Обозначим скорость мяча относительно земли до соударения за $\upsilon_1$, после соударения – за $\upsilon_2$, скорость плиты – за $u$. Тогда скорость мяча относительно плиты до удара, согласно (5.2), равна: $\vec{\upsilon}_{1om} = \vec{\upsilon}_1 - \vec{u}$. Введём систему координат, как показано на рисунке. Тогда в проекции на ось $Oy$ выражение для $\vec{\upsilon}_{1om}$ примет вид:




$\upsilon_{1om} = \upsilon_1 - u$. После соударения скорость мяча относительно плиты сохраняется по величине, изменяясь по направлению: $\upsilon_{2om} = \upsilon_{1om} = \upsilon_1 - u$. Притом, угол α падения мяча на плиту равен углу отражения мяча от плиты. Согласно (5.2), абсолютная и относительная скорости мяча после удара связаны соотношением: $\vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_{2om} + \vec{u}$ и вместе со скоростью плиты $\vec{u}$ образуют треугольник скоростей, показанный на рисунке. Из рисунка видно, что угол $\beta$ между $\vec{\upsilon}_{2om}$ и $\vec{\upsilon}_2$ равен $\beta = 90^o - 2\alpha$, а $\mathrm{tg}\beta = \dfrac{u}{\upsilon_2}$. Откуда

$$\upsilon_2 = \frac{u}{\mathrm{tg}\beta} = \frac{u}{\mathrm{tg}\left(90^o - 2\alpha\right)} = \frac{u}{\mathrm{ctg}2\alpha} = u\mathrm{tg}2\alpha = u\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} = 4 \text{ м/с}.$$

*Ответ:* $\upsilon_2 = u\dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} = 4$ м/с.

## § 6. Равномерное прямолинейное движение тела

Рассмотрим случай *равномерного прямолинейного движения* тела, то есть движения, при котором тело за любые равные промежутки времени совершает одинаковые перемещения. Скорость тела, согласно (3.3), при этом остаётся постоянной как по модулю, так и по направлению в любой момент времени: $\vec{\upsilon} = const$. При этом зависимость $\vec{r}\left(t\right)$ имеет вид:

$$\vec{r}\left(t\right) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}t \tag{6.1}$$

где $\vec{r}_0$ - радиус-вектор тела в начальный момент времени $t$ = 0. В этой связи вспомним замечание о *начальных условиях,* сделанное выше. Вектор $\vec{r}_0$ здесь является тем начальным условием, которое позволяет однозначно определить радиус-вектор тела в любой момент времени в процессе движения.

Векторное уравнение (6.1) равносильно системе двух скалярных уравнений, выражающих зависимость от времени координат $x$ и $y$ движущегося тела:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \upsilon_x t \\ y(t) = y_0 + \upsilon_y t \end{cases} \qquad (6.2)$$

где $x_0$ и $y_0$ – начальные координаты тела в момент времени $t = 0$, а $\upsilon_x$ и $\upsilon_y$ - проекции вектора скорости $\vec{\upsilon}$ на координатные оси О$x$ и О$y$ соответственно.

Траектория равномерного прямолинейного движения тела графически представляет собой отрезок прямой линии (рис. 6.1), тангенс угла наклона которой к оси абсцисс равен отношению проекций скорости на оси координат: $\mathrm{tg}\alpha = \upsilon_y / \upsilon_x$. Аналитическое уравнение траектории, то есть зависимость $y(x)$ легко получить, исключив параметр $t$ из системы уравнений (6.2).

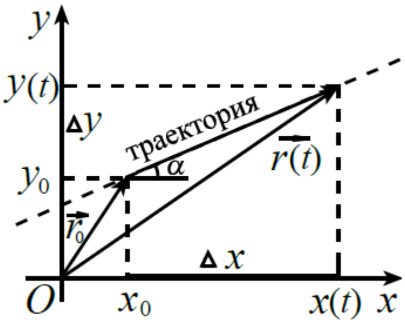


Рис. 6.1

$$y(x) = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}(x - x_0) + y_0 \qquad (6.3)$$

**Пример 6.1.** Равномерное прямолинейное движение тела на плоскости описывается уравнениями: $x(t) = 6 + 3t$, $y(t) = 4t$ (величины измерены в СИ). Запишите уравнение траектории тела. Изобразите графически зависимость модуля вектора скорости от времени $\upsilon(t)$. Определите путь, пройденный телом в течение первых пяти секунд движения.

*Решение.* Сравнивая уравнения движения, представленные в условии задачи, с системой уравнений (6.2), находим: $x_0$ = 6 м, $y_0$ = 0 м, $\upsilon_x$ = 3м/с, $\upsilon_y$ = 4 м/с. Уравнение траектории получим, подставив эти значения в общее уравнение (5.3): $y(x) = \frac{4}{3}x - 8$. Модуль скорости тела определим, зная $\upsilon_x$ и $\upsilon_y$: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$ = 5 м/с. График зависимости представлен на рисунке 6.2.

При равномерном прямолинейном движении пройденный путь $S$ численно равен модулю вектора $|\Delta\vec{r}|$ перемещения тела. Вектор для такого движения найдём из уравнения (5.1): $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{\upsilon}t$. Его модуль равен: $\Delta r = \upsilon t$. Таким образом, при равномерном движении путь, пройденный телом в течение времени $t$, определяется по формуле $S = \upsilon t$,т. е. численно равен площади прямоугольника под графиком зависимости $\upsilon(t)$. Этот вывод можно обобщить и на случай неравномерного движения. В нашем примере путь равен площади прямоугольника, заштрихованного на рис. 6.2.

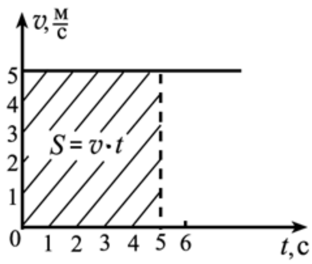
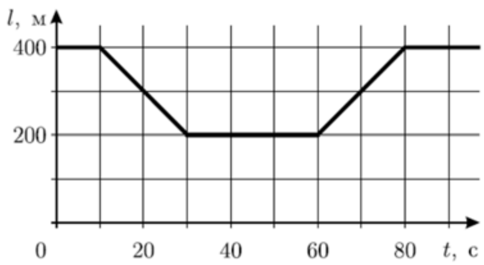


Рис. 6.2

**Пример 6.2.** На длинном прямом шоссе автомобили движутся с постоянной скоростью $\upsilon_1$ всюду, за исключением моста, на котором автомобили движутся с другой постоянной скоростью $\upsilon_2$. На рисунке изображен график зависимости расстояния $l$ между двумя едущими друг за другом автомобилями от времени $t$. Найдите скорости $\upsilon_1$ и $\upsilon_2$, а также длину моста.




*Решение.* Из графика следует, что расстояние между автомобилями на шоссе $l_1$ = 400 м, а на мосту – $l_2$ = 200 м. Первый автомобиль въезжает на мост в момент времени $t_1$ = 10 с, второй – в момент времени $t_2$ = 30 с. Когда первый автомобиль въезжает на мост, второй находится от моста на расстоянии $l_1 = 400$ м. Получается, что второй автомобиль движется до моста со скоростью: $\upsilon_1 = \dfrac{l_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{400}{20} = 20$ м/с. Аналогично, за время от $t_1$ до $t_2$ первый автомобиль проезжает по мосту расстояние $l_2$ = 200 м, следовательно, скорость автомобиля по мосту равна: $\upsilon_2 = \dfrac{l_2}{t_2 - t_1} = \dfrac{200}{20} = 10$ м/с. Первый автомобиль съезжает с моста в момент времени $t_3$ = 30 с. Получается, длина моста равна: $L = \upsilon_2\left(t_3 - t_1\right) = 10\left(60 - 10\right) = 500$ м.

*Ответ:* $\upsilon_1 = \dfrac{l_1}{t_2 - t_1} = 20$ м/с, $\upsilon_2 = \dfrac{l_2}{t_2 - t_1} = 10$ м/с, $L = \upsilon_2\left(t_3 - t_1\right) = 500$ м.

**Пример 6.3.** С какой скоростью растёт «хвост» автомобильной пробки, образовавшейся из-за резкого снижения скорости на некотором участке дороги? До пробки автомобили движутся однородным потоком со скоростью $\upsilon_1 = 50$ км/ч со средней плотностью $\rho_1 = 20$ автомобилей на 1 км пути. В пробке скорость автомобилей снижается до $\upsilon_2 = 5$ км/ч, и движутся они почти вплотную друг к другу со средней плотностью $\rho_2 = 125$ автомобилей на 1 км пути. *(Московская олимпиада школьников по физике, 2013, 8 класс)*

*Решение.* Пусть $\upsilon_n$ – скорость, с которой растёт «хвост» пробки относительно земли, а $t_n$ - время, за которое пробка вырастает на длину $l_n$ относительно земли. За это время первоначальный конец пробки продвинется в направлении движения на расстояние $l_2 = \upsilon_2 t_n$. Тогда количество машин, которое добавится в хвост пробки за время $t_n$ равно: $N = \left(l_2 + l_n\right)\rho_2$. С другой стороны, $N = \left(l_1 + l_n\right)\rho_1$, где $l_1 = \upsilon_1 t_n$ – расстояние, которое прошла машина, вставшая в конец пробки через время $t_n$ с момента начала отсчёта времени.

Подставляя выражения для $l_1$, $l_2$, $l_n = \upsilon_n t_n$, в формулы для количества машин $N$, в итоге получаем: $N = \left(\upsilon_1 t_n + \upsilon_n t_n\right)\rho_1 = \left(\upsilon_2 t_n + \upsilon_n t_n\right)\rho_2$. Решая полученное уравнение, получаем конечное выражение для скорости роста хвоста пробки:

$$\upsilon_n = \frac{\rho_1\upsilon_1 - \rho_2\upsilon_2}{\rho_2 - \rho_1} \approx 3{,}57 \text{ км/ч}.$$

## § 7. Равноускоренное прямолинейное движение тела

*Равноускоренным* называется такое неравномерное движение, при котором скорость $\vec{\upsilon}$ за любые равные промежутки времени $\Delta t$ изменяется на одинаковую величину $\Delta\vec{\upsilon}$. В этом случае ускорение $\vec{a}$ тела не зависит от времени и остаётся постоянным в процессе движения: $\vec{a} = const$ (при этом траектория движения тела не обязательно прямолинейная).

Из определения ускорения (3.5) следует, что при равнопеременном движении скорость $\vec{\upsilon}$ тела изменяется с течением времени по закону:

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t \tag{7.1}$$

где $\vec{\upsilon}_0$ – скорость тела в начальный момент времени $t = 0$.

В свою очередь, зависимость $\vec{r}(t)$ имеет вид:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \tag{7.2}$$

где $\vec{r}_0$ – начальный радиус-вектор тела при $t = 0$. Вновь заметим, что величины $\vec{\upsilon}_0$ и $\vec{r}_0$ представляют собой начальные условия, позволяющие в любой момент времени однозначно определить векторы $\vec{\upsilon}$ и $\vec{r}$.

При координатном способе описания равнопеременного движения на плоскости векторным уравнениям (7.1) и (7.2) равносильны следующие системы уравнений для проекций скорости и радиус-вектора тела на оси выбранной системы отсчёта:

$$\begin{cases} \upsilon_x(t) = \upsilon_{0x} + a_x t \\ \upsilon_y(t) = \upsilon_{0y} + a_y t \end{cases}, \tag{7.3}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \upsilon_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2} \\ y(t) = y_0 + \upsilon_{0y}t + \dfrac{a_y t^2}{2} \end{cases} \tag{7.4}$$

где $x_0$ и $y_0$ – начальные абсцисса и ордината тела (при $t = 0$), и проекции начальной скорости тела на координатные оси, $\upsilon_x$ и $\upsilon_y$ – проекции вектора ускорения на оси O$x$ и O$y$ соответственно, $t$ – текущий момент времени. В принципе, формулы (7.1) и (7.2) или равносильные им системы уравнений (7.3) и (7.4) позволяют решить любую задачу на движение тела с постоянным ускорением.

В случае прямолинейного движения тела удобнее одну координатную ось, например ось O$x$, совместить с траекторией тела. Тогда для описания движения будет достаточно одной этой оси, в проекциях на которую векторные уравнения (7.1) и (7.2) дают:

$$\upsilon_x(t) = \upsilon_{0x} + a_x t \tag{7.5}$$

$$x(t) = x_0 + \upsilon_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} \tag{7.6}$$

Проекцию перемещения $S_x$ тела можно найти из равенства:

$$S_x(t) = x(t) - x_0 = \upsilon_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} \tag{7.7}$$

Эту формулу можно записать по-другому, если подставить в неё время $t$, выраженное из уравнения (7.5):

$$t = \frac{\upsilon_x - \upsilon_{0x}}{a_x} \tag{7.8}$$

Тогда для проекции перемещения $S_x$ после несложных преобразований получим:

$$S_x = \frac{\upsilon_x^2 - \upsilon_{0x}^2}{2a_x} \tag{7.9}$$

Удобство этой формулы заключается в том, что она не содержит времени $t$ в явном виде. Если же в формулу (7.9) вместо ускорения подставить выражение:

$$a_x = \frac{\upsilon_x - \upsilon_{0x}}{t} \tag{7.10}$$

то можно получить ещё одну формулу для расчета проекции перемещения тела при прямолинейном равноускоренном движении:

$$S_x = \frac{\upsilon_{0x} + \upsilon_x}{2} t \tag{7.11}$$

Отметим, что формулу (7.11) можно было получить и из графической зависимости $\upsilon_x(t) = \upsilon_{0x} + a_x t$. Действительно, вспомнив, что площадь под графиком в координатах $\upsilon_x(t)$ равна проекции перемещения (рис. 7.1), получаем, что проекция перемещения равна площади трапеции:

$$S_x = S_{трапеции} = \frac{\upsilon_{0x} + \upsilon_x}{2} t \tag{7.12}$$

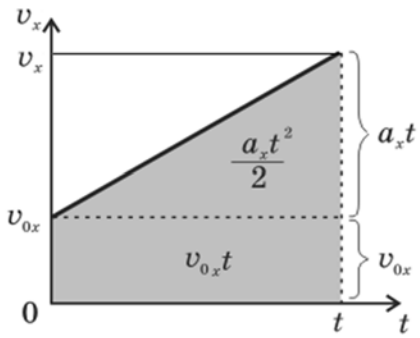



Рис. 7.1

Если на промежутке времени от 0 до $t$ направление движения тела не изменяется на противоположное, то проекция перемещения тела совпадает с пройденным расстоянием: $S = S_x$. И тогда формулы (7.7), (7.9) и (7.11) применимы для нахождения пути.

**Пример 7.1.** За 2 с прямолинейного равноускоренного движения тело прошло 20 м, увеличив свою скорость в 3 раза. Определите конечную скорость тела.

*Решение.* Пусть за время $t$ = 2 с скорость тела изменилась от $\upsilon_0$ до $\upsilon$. Направим ось $Ox$ по направлению движения. Тогда в проекциях на эту ось, согласно (7.11), можно записать: $S = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2} t$. По условию $\upsilon_0 = \upsilon/3$ и, следовательно, $S = \frac{2}{3}\upsilon t$. Откуда искомая скорость $\upsilon = \frac{3S}{2t}$. Подставляя сюда значения $S$ = 20 м и $t$ = 2 с, найдём окончательно $\upsilon$ = 15 м/с.

**Пример 7.2.** Тело, двигаясь из состояния покоя равноускоренно, приобрело скорость 2 м/с, пройдя путь 10 м. Чему будет равна скорость тела через следующие 10 м, если ускорение тела останется прежним?

*Решение.* Запишем Дано, введя следующие обозначения: начальная скорость $\upsilon_0$= 0 м/с, скорость в конце первого участка $\upsilon_1$ = 2 м/с, длина первого и второго участков: $S_{01}$ = 10 м, $S_{12}$ = 10 м. Обозначим за $\upsilon_2$ – скорость в конце второго участка, которую нужно найти. Так как нам ничего не сказано про время движения, воспользуемся для решения задачи соотношением (7.9). Направим ось *Ox* по направлению ускорения тела. Тогда для первого участка с учетом проекций можно записать: $S_{01} = \dfrac{\upsilon_1^2 - \upsilon_0^2}{2a} = \dfrac{\upsilon_1^2}{2a}$. Для участка $S_{02} = S_{01} + S_{12} = 2S_{01}$ также можем записать: $S_{02} = \dfrac{\upsilon_2^2 - \upsilon_0^2}{2a} = \dfrac{\upsilon_2^2}{2a}$. Подставляя в соотношение $S_{02} = 2S_{01}$, выражения для $S_{01}$ и $S_{02}$, в итоге получаем: $\upsilon_2 = \sqrt{2}\upsilon_1 = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ м/с.

**Пример 7.3.** По прямому участку дороги с одинаковой скоростью $\upsilon$ друг за другом едут две машины, одна из которых при торможении может двигаться с предельным ускорением $a_1$, а другая — с $a_2$. Если с постоянным ускорением до полной остановки начинает тормозить водитель передней машины, то водитель задней реагирует и нажимает на педаль тормоза не сразу, а с задержкой $\tau$ = 0,3 с. В зависимости от того, какая из машин едет впереди, безопасные дистанции, исключающие столкновение между ними, оказываются равными $L_1$ = 6 м или $L_2$ = 9 м. Определите, с какой скоростью едут машины. Оцените разность ускорений $\Delta a$ машин, если известно, что сами ускорения примерно равны 5 м/с$^2$. *(ВОШ, Региональный этап, 2018,9 кл)*

*Решение.* Будем полагать, что безопасная дистанция – это минимально возможное расстояние между машинами при движении с одинаковой скоростью, при котором ещё не будет столкновения в случае торможения передней машины, т.е. после остановки обеих машин расстояние между ними сократится до нуля. Так как движение машин после начала торможения равноускоренное и про время торможения машин в условии ничего не сказано, выберем для расчётов формулу (7.9), связывающую расстояние, скорости и ускорение машин: $S_x = \dfrac{\upsilon_x^2 - \upsilon_{0x}^2}{2a_x}$. Направив ось *Ox* по направлению движения, запишем пути торможения первой $S_1 = \dfrac{\upsilon^2}{2a_2}$ и второй $S_2 = \dfrac{\upsilon^2}{2a_2}$ машин. Здесь мы учли, что конечная скорость машин равна нулю, а ускорение направлено против движения. Пусть $L_1$ – безопасное расстояние, когда впереди едет машина с ускорением торможения $a_1$, а $L_2$ – когда впереди едет машина с ускорением торможения $a_2$. Тогда можно записать систему уравнений для первого и второго случаев: $\begin{cases} S_1 + L_1 = \upsilon\tau + S_2 \\ S_2 + L_2 = \upsilon\tau + S_1 \end{cases}$. Суммируя данные уравнения и выражая скорость, получаем формулу: $\upsilon = \dfrac{L_1 + L_2}{2\tau} = 25$ м/с. Вычитая уравнения системы, получаем: $S_1 - S_2 = \dfrac{L_2 - L_1}{2}$. После подстановки в данное уравнение значений для путей торможения $S_1$ и $S_2$ и определённых преобразований, выражение для $\Delta a$ примет вид: $\Delta a = \dfrac{L_2 - L_1}{\upsilon^2} a_1 a_2 = 0{,}12$ м/с$^2$.

## § 8. Движение тела под действием силы тяжести

В этом параграфе остановимся более подробно на движении тела в гравитационном поле Земли.

*Свободное падение* – движение тела, при котором на него действует только сила тяжести. Вблизи поверхности земли ускорение постоянно, направлено вертикально вниз и равно $g \approx 9{,}8$ м/с$^2$. Часто в задачах принимают ускорение свободного падения равным $g = 10$ м/с$^2$. Сопротивлением воздуха, соответственно, при свободном падении пренебрегают. Таким образом, движение тела у поверхности земли является равноускоренным, а уравнения движения для координат и скоростей в проекциях на произвольные оси $x$ и $y$ в общем виде, согласно (7.3) и (7.4), выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \upsilon_{0x} t + \dfrac{a_x t^2}{2} \\ y(t) = y_0 + \upsilon_{0y} t + \dfrac{a_y t^2}{2} \end{cases} \qquad (8.1) \qquad\qquad \begin{cases} \upsilon_x(t) = \upsilon_{0x} + a_x t \\ \upsilon_y(t) = \upsilon_{0y} + a_y t \end{cases} \qquad (8.2)$$

Далее разберем несколько случаев свободного падения тела. Начнём с одномерного случая – движения тела вдоль вертикальной прямой.

### 8.1. Движение тела, брошенного вертикально

Рассмотрим движение тела, брошенного вертикально вверх с поверхности земли с начальной скоростью $\vec{\upsilon}_0$ (рис.8.1). Найдем время подъема на максимальную высоту, время всего полета, максимальную высоту подъема и скорость перед ударом о землю, а также пройденный путь и перемещение тела.

Направим ось О$y$ вертикально вверх, начало координат выберем на уровне земли. Отсчёт времени начнём с момента броска. Тогда начальные значения координаты, скорости и ускорения запишутся в виде: $y_0 = 0,\ \upsilon_{0y} = \upsilon_0, a_y = -g$

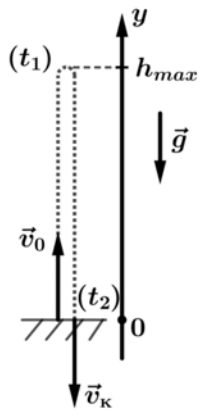


Рис. 8.1

Напомним, что мы ставим знак «+» в проекции вектора, если его направление совпадает с направлением оси, и знак «–» в противном случае.

Уравнения движения в проекциях на выбранную ось, согласно (8.1) и (8.2), выглядят следующим образом:

$$y(t) = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad (8.3) \qquad \upsilon_y(t) = \upsilon_0 - gt \quad (8.4)$$

Теперь остановимся более подробно на обозначениях для моментов и промежутков времени. Обозначим момент начала движения тела за $t_0 = 0$, момент достижения телом максимальной высоты за $t_1$, момент соприкосновения с поверхностью в конце движения за $t_2$. Тогда время подъёма тела будет равно: $t_{под} = t_1 - t_0 = t_1$, время падения: $t_{пад} = t_2 - t_1$, время всего полёта: $t_п = t_2 - t_0 = t_2$. Таким образом, $t_{под} = t_1$, $t_п = t_2$, а $t_{пад} = t_п - t_{под}$.

В наивысшей точке подъёма скорость тела становится равной нулю: $\upsilon_y(t_1) = 0$, или, согласно (8.4): $\upsilon_0 - gt_1 = 0$, откуда можно найти время подъёма $t_{под} = t_1 = \dfrac{\upsilon_0}{g}$. Максимальная высота подъёма при этом, согласно (8.3), равна: $h_{\max} = y(t_1) = \upsilon_0 t_1 - \dfrac{gt_1^2}{2} = \dfrac{\upsilon_0^2}{2g}$, или коротко: $h_{\max} = \dfrac{\upsilon_0^2}{2g}$. Условием того, что тело вновь окажется на уровне земли, является уравнение $y(t_2) = 0$; или $\upsilon_0 t_2 - \dfrac{gt_2^2}{2} = 0$. Это уравнение имеет два корня: $t_0 = 0$ и $t_п = t_2 = \dfrac{2\upsilon_0}{g}$. Первое значение для времени соответствует моменту старта, а второе – моменту падения тела. Обратите внимание, что время всего полета оказалось вдвое больше времени подъема. Отсюда следует, что время подъема $t_{под}$ равно времени падения $t_{пад}$ и в верхней точке тело "не задерживается". Отметим, что условие $t_{под} = t_{пад}$ выполняется только при отсутствии сил сопротивления среды, в которой происходит движение тела.

Типичной ошибкой является считать условием падения уравнение $\upsilon_y(t_п) = 0$. Действительно, тело останавливается после удара. Но движение перестает быть равноускоренным с ускорением $g$ после начала взаимодействия тела с землей, а значит, исходные уравнения уже не описывают движение тела.

Проекция скорости в конце движения, согласно (8.4), равна:

$$\upsilon_{к_y} = \upsilon_y(t_п) = \upsilon_0 - gt_п = \upsilon_0 - g \cdot \frac{2\upsilon_0}{g} = -\upsilon_0 .$$

То есть конечная скорость направлена вниз, так как её проекция на ось $y$ отрицательна, а по модулю равна начальной: $\upsilon_к = \upsilon_0$. При решении задач равенство модулей конечной и начальной скоростей можно не выводить, а использовать, как известный факт.

Пройденный за время полёта путь равен сумме длин участков движения вверх и вниз: $S = 2h_{max}$, а перемещение равно нулю, так как начальное и конечное положения тела совпадают.

**Пример 8.1.** Первое тело бросают с высоты $h$ вертикально вниз с начальной скоростью $\upsilon_0$. Через какое время τ нужно бросить второе тело с такой же начальной скоростью вертикально вверх с поверхности земли, чтобы они одновременно упали на землю? При каком условии это возможно?

*Решение:* Ось О$y$ направим вертикально вверх, начало координат расположим на уровне земли. Отсчет времени будем вести с момента броска первого тела. Тогда зависимость координаты $y$ первого тела от времени, согласно (8.1), имеет вид: $y_1(t) = h - \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Второе тело начинает движение через промежуток времени τ, поэтому для него эта зависимость выглядит так: $y_2(t) = \upsilon_0(t-\tau) - \frac{g(t-\tau)^2}{2}$. Условие одновременного падения тел следующее: $y_1(t) = y_2(t) = 0$, что равносильно системе $\begin{cases} y_1(t) = 0 \\ y_2(t) = 0 \end{cases}$.

Запишем подробнее второе уравнение: $\upsilon_0(t-\tau) - \frac{g(t-\tau)^2}{2} = 0$.

Первое его решение $t = \tau$ имеет тот смысл, что второе тело бросают в момент падения на землю первого тела – этот случай не соответствует условию задачи. Второе решение $\tau = t - \frac{2\upsilon_0}{g}$ отвечает условию одновременного падения обоих тел.

Решим первое уравнение системы, преобразовав его к виду: $\frac{gt^2}{2} + \upsilon_0 t - h = 0$,

$D = \upsilon_0^2 + 2gh$, $t = \frac{-\upsilon_0 \pm \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh}}{g}$. В данной задаче физический смысл имеет только положительный корень. После подстановки выражения для $t$ в τ, получаем: $\tau = \frac{-3\upsilon_0 + \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh}}{g}$. Учтём, что тела смогут встретиться на поверхности, если $\tau > 0$: $\frac{-3\upsilon_0 + \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh}}{g} > 0$; $\sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh} > 3\upsilon_0$; $h > \frac{4\upsilon_0^2}{g}$.

*Ответ:* $\tau = \frac{-3\upsilon_0 + \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh}}{g}$; при $h > \frac{4\upsilon_0^2}{g}$.

## 8.2. Движение тела, брошенного горизонтально

Следующий случай свободного падения: тело бросили с высоты $h$ с начальной скоростью $\vec{\upsilon}_0$, направленной горизонтально (рис.8.2). Найдем время полёта $t_п$, дальность полета $L$, модуль $\upsilon_к$ и угол $\beta$ наклона вектора конечной скорости к горизонту.

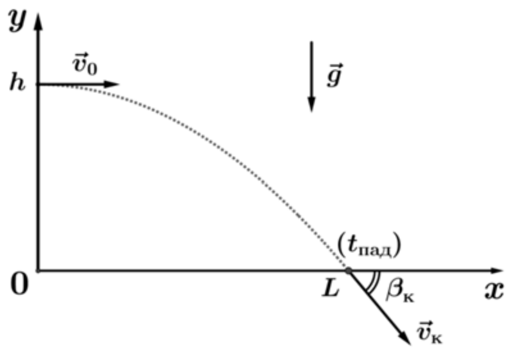


Рис. 8.2

Систему координат введем следующим образом: ось $x$ сонаправим с начальной скоростью, ось $y$ направим вертикально вверх, начальное положение тела имеет координаты (0 ; $h$). Отсчет времени будем вести с момента броска, тогда $t_0 = 0$ и время полёта численно совпадает с моментом падения тела на поверхность. Начальные условия и уравнения движения для координат и скоростей, согласно (8.1) и (8.2), запишутся в виде:

$$\begin{cases} x_0 = 0,\ \upsilon_{0y} = \upsilon_0,\ a_x = 0 \\ y_0 = h,\ \upsilon_{0y} = 0,\ a_y = -g \end{cases}; \quad (8.5) \qquad \begin{cases} x(t) = \upsilon_0 t \\ y(t) = h - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}; \quad (8.6) \qquad \begin{cases} \upsilon_x(t) = \upsilon_0 \\ \upsilon_y(t) = -gt \end{cases} \quad (8.7)$$

В момент падения координата тела по оси О$y$ становится равна нулю: $y(t_{пад}) = 0$, откуда с помощью уравнений (8.6) получаем выражения для времени и дальности полёта: $t_п = t_{пад} = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$, $L = x(t_п) = \upsilon_0 t_п = \upsilon_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

Проекции конечной скорости: $\begin{cases} \upsilon_{к_x} = \upsilon_x(t_п) = \upsilon_0 \\ \upsilon_{к_y} = \upsilon_y(t_п) = -gt_п = -\sqrt{2gh} \end{cases}$

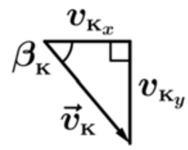


Рис. 8.3

Модуль конечной скорости: $\upsilon_к = \sqrt{\upsilon_{к_x}^2 + \upsilon_{к_y}^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh}$.

Тангенс угла между конечной скоростью и горизонтом: $\mathrm{tg}\beta_к = \dfrac{\upsilon_{к_y}}{\upsilon_{к_x}} = -\dfrac{\sqrt{2gh}}{\upsilon_0}$.

Знак "–" говорит о том, что скорость направлена "вниз" по отношению к горизонту (рис.8.3).

**Пример 8.2.** Для тушения лесных пожаров МЧС России использует самолёты-амфибии БС-200ЧС. Определите, на каком расстоянии по горизонтали от очага пожара необходимо осуществить выброс воды, если самолёт летит со скоростью $\upsilon$ = 360 км/ч на высоте Н = 125 м. Ускорение свободного падения считайте равным g = 10 м/с$^2$, сопротивление воздуха не учитывать. Считать, что вся масса воды сбрасывается единовременно. *(Всеармейская олимпиада по физике,2 этап, 2016, 9кл)*

*Решение:* Выберем систему координат $Oxy$ так, чтобы ось $Oy$ была направлена по вертикали вниз, а ось $Ox$ — по горизонтали в направлении скорости движения самолёта. Начало координат разместим в точке выброса воды из самолёта. По горизонтали движение воды, сброшенной с самолёта, равномерное, а по вертикали — равноускоренное. Тогда, опираясь на уравнения (8.1), можем найти расстояние по горизонтали, которое пройдёт вода за время падения $S = \upsilon t$, где $\upsilon$ = 360 км/ч = 100 м/с — скорость самолёта и, соответственно, горизонтальная составляющая скорости воды во время падения. Время падения воды $t$ по оси $Oy$ найдем из формулы $H = \dfrac{gt^2}{2}$ (поскольку начальная скорость по вертикали нулевая), откуда $t = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$.

Подставляя $t$ в формулу для $S$, получаем ответ: $S = \upsilon\sqrt{\dfrac{2H}{g}} = 100\sqrt{\dfrac{2\cdot 125}{10}}$ =500м

**Пример 8.3.** Мячик бросают горизонтально с начальной скоростью $\upsilon_0$ с плоскости, наклоненной к горизонту под углом α. Найти, на каком расстоянии $l$ от места броска случится первое столкновение тела с плоскостью, направление (угол $\varphi$) и величину скорости $\upsilon_2$ тела сразу после столкновения. Удар считать абсолютно упругим.

*Решение:* Введем систему координат так, что начало координат совпадает с точкой броска, ось $x$ параллельна, а ось $y$ перпендикулярна поверхности земли и направлена вниз. Запишем уравнения движения для мячика, согласно (8.1) и (8.2):

$$\begin{cases} x(t) = \upsilon_0 t \\ y(t) = \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}, \qquad \begin{cases} \upsilon_x(t) = \upsilon_0 \\ \upsilon_y(t) = gt \end{cases}$$

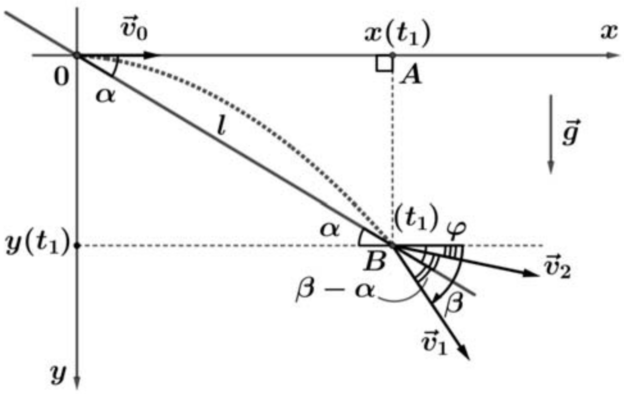



Рис. 8.4

Условием того, что мячик коснулся плоскости, будет соотношение:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{y(t_1)}{x(t_1)} = \frac{gt_1^2}{2} : \left(\upsilon_0 t_1\right) = \frac{gt_1}{2\upsilon_0}; \text{ откуда } t_1 = \frac{2\upsilon_0 \mathrm{tg}\alpha}{g}.$$

Тогда: $x(t_1) = \upsilon_0 t_1 = \dfrac{2\upsilon_0^2 \mathrm{tg}\alpha}{g}$; $\quad y(t_1) = \dfrac{g}{2}\cdot t_1^2 = \dfrac{g}{2}\cdot\dfrac{4\upsilon_0^2\mathrm{tg}^2\alpha}{g^2} = \dfrac{2\upsilon_0^2\mathrm{tg}^2\alpha}{g}$.

Тогда, согласно теореме Пифагора, $l = OB = \sqrt{\left(x(t_1)\right)^2 + \left(y(t_1)\right)^2} =$

$$= \sqrt{\left(\frac{2\upsilon_0^2\mathrm{tg}\alpha}{g}\right)^2 + \left(\frac{2\upsilon_0^2\mathrm{tg}^2\alpha}{g}\right)^2} = \frac{2\upsilon_0^2\mathrm{tg}\alpha}{g}\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{2\upsilon_0^2\sin\alpha}{g\cos^2\alpha}.$$

Скорость мячика за мгновение до касания плоскости по теореме Пифагора равна:

$$\upsilon_1 = \sqrt{\left(\upsilon_x(t_1)\right)^2 + \left(\upsilon_y(t_1)\right)^2} = \sqrt{\left(\upsilon_0\right)^2 + \left(gt_1\right)^2} = \sqrt{\left(\upsilon_0\right)^2 + \left(\cancel{g}\cdot\frac{2\upsilon_0 \operatorname{tg}\alpha}{\cancel{g}}\right)^2} = \upsilon_0\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Так как удар упругий, то скорость после взаимодействия мячика с плоскостью поменяет направление, сохранив величину: $\upsilon_2 = \upsilon_1 = \upsilon_0\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\alpha}$

Угол между скоростью $\vec{\upsilon}_1$ непосредственно перед столкновением и горизонтом определяется равенством $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\upsilon_y(t_1)}{\upsilon_x(t_1)} = \dfrac{gt_1}{v_0} = 2\operatorname{tg}\alpha$ .

Пусть угол между направлением скорости $\vec{\upsilon}_1$ перед ударом и горизонтом равен $\beta$. Тогда угол между $\vec{\upsilon}_1$ и наклонной плоскостью равен $\beta-\alpha$. Так как удар упругий, то угол между наклонной плоскостью и направлением скорости $\vec{\upsilon}_2$ сразу после удара также будет равен $\beta-\alpha$. Тогда угол между горизонтом и скоростью $\vec{\upsilon}_2$ сразу после отскока равен $\varphi = \alpha-(\beta-\alpha) = 2\alpha-\beta$ (рис. 8.4). Отметим, что скорость $\vec{\upsilon}_2$ в нашем предположении направлена "ниже" горизонта; так это или нет, покажет знак конечного выражения.

Далее выполним тригонометрические преобразования, применяя формулу тангенса суммы и тангенса двойного угла:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(2\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}(2\alpha)-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}(2\alpha)\cdot\operatorname{tg}\beta} = \frac{\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-2\operatorname{tg}\alpha}{1+\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot 2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha\left(1-(1-\operatorname{tg}^2\alpha)\right)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha+4\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}^3\alpha}{1+3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

Полученное выражение положительно, следовательно, мы верно предположили направление скорости после отскока.

*Ответ:* $l = \sqrt{\left(x(t_1)\right)^2 + \left(y(t_1)\right)^2}$ ; $\upsilon_2 = \upsilon_0\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\alpha}$ ; $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2\operatorname{tg}^3\alpha}{1+3\operatorname{tg}^2\alpha}$, скорость направлена "вниз" к горизонту.

*Примечание:* Предлагаем вам решить данную задачу в другой системе координат, выбрав ось *Ox* вдоль наклонной плоскости, а ось *Oy* – перпендикулярно её поверхности, и сравнить полученные результаты.

### 8.3. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Теперь разберем общий случай свободного падения – движение тела, брошенного под углом к горизонту с начальной скоростью $\vec{\upsilon}_0$. При отсутствии сопротивления воздуха тело будет двигаться равноускоренно с ускорением $\vec{g}$.

Систему координат расположим таким образом, что начало координат совпадает с точкой броска, ось $x$ параллельна, а ось $y$ перпендикулярна земной поверхности (рис.8.5). Такой выбор обусловлен упрощением уравнений движения, хотя в некоторых случаях разумнее расположить оси иначе. Отсчет времени будем вести от начала движения.

Пусть модуль начальной скорости равен $\upsilon_0$, угол вектора скорости к горизонту составляет $\alpha$. Выпишем, чему равны константы, входящие в уравнения:

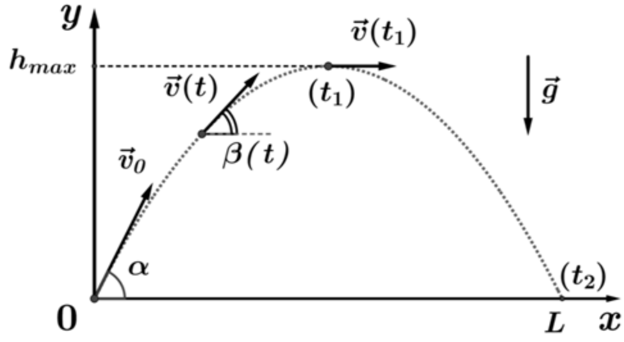


Рис. 8.5

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha \\ a_x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_0 = 0 \\ \upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha \\ a_y = -g \end{cases}$$

Тогда уравнения движения, согласно (8.1) и (8.2), примут следующий вид:

$$\begin{cases} x(t) = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t \\ y(t) = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \quad (8.8) \qquad \begin{cases} \upsilon_x(t) = \upsilon_0 \cos\alpha \\ \upsilon_y(t) = \upsilon_0 \sin\alpha - gt \end{cases} \quad (8.9)$$

Модуль скорости тела в произвольный момент времени можно найти по теореме Пифагора (так как введенная система координат прямоугольная):

$$\upsilon(t) = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{(\upsilon_0 \cos\alpha)^2 + (\upsilon_0 \sin\alpha - gt)^2} = \sqrt{\upsilon_0{}^2 + 2\upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - g^2 t^2} \quad (8.10)$$

Угол между скоростью и горизонтом в произвольный момент времени находится из соотношения: $\mathrm{tg}\beta(t) = \dfrac{\upsilon_y(t)}{\upsilon_x(t)} = \dfrac{\upsilon_0 \sin\alpha - gt}{\upsilon_0 \cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha - \dfrac{gt}{\upsilon_0 \cos\alpha}$ (8.11)

Начиная с некоторого значения $t$, tg$\beta$ становится отрицательным. Это означает, что скорость направлена "вниз" по отношению к горизонту. Это важно, так как в случае, если просят найти направление скорости (помимо значения угла) следует указывать, в какую сторону – "вверх" или "вниз" она направлена. Заметим, что в начальный момент времени $t = 0$: $tg\beta(0) = \mathrm{tg}\alpha$ .

Далее найдем некоторые из *характеристик* движения тела, брошенного под углом к горизонту: максимальную высоту подъема $h_{\max}$, время подъёма на максимальную высоту $t_{\text{под}}$, время падения $t_{\text{пад}}$, время полёта $t_{\text{п}}$ и дальность полета $L$, то есть расстояние от исходного положения тела до точки падения.

Ключевым шагом для решения поставленных задач является "фиксирование" уравнений движения в определенный момент времени. То есть нужно понять, что мы можем сказать про какую-либо переменную ($x$, $y$, $\upsilon_x, \upsilon_y$) в конкретный момент времени. Для этого обсудим более подробно связь между моментами и промежутками времени. Обозначим момент начала движения тела за $t_0 = 0$, момент достижения телом максимальной высоты за $t_1$, момент соприкосновения с поверхностью в конце движения за $t_2$. Тогда время подъёма тела будет равно: $t_{под} = t_1 - t_0 = t_1$, время падения: $t_{пад} = t_2 - t_1$, время всего полёта: $t_n = t_2 - t_0 = t_2$. Таким образом, получаем: $t_{под} = t_1$, $t_n = t_2$, а $t_{пад} = t_n - t_{под}$ .

Начнём с нахождения максимальной высоты подъёма. Чем же характерна данная точка траектории? До этой точки тело относительно оси О$y$ движется вверх, а после – вниз. Так что в верхней точке траектории проекция скорости тела на ось О$y$ должна быть равна 0. Это и есть *условие подъема на максимальную высоту*: $\upsilon_y = 0$. Соответственно, уравнение для поиска $t_1$ выглядит так: $\upsilon_y(t_1) = 0$. Подставим $t_1$ в функцию $\upsilon_y(t)$ из соотношения (8.9): $\upsilon_0 \sin\alpha - gt_1 = 0$; откуда получаем время подъёма на максимальную высоту: $t_{под} = t_1 = \dfrac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$.

Максимальная высота полета равна координате по оси $y$ в момент времени $t_1$: $h_{\max} = y(t_1) = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot \dfrac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g} - \dfrac{g}{2} \cdot \left(\dfrac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$.

Теперь определим время полёта тела $t_п$. Условием того, что тело находится на уровне земли, является равенство нулю координаты $y$: $y(t_2) = 0$; или $\upsilon_0 \sin\alpha \cdot t_2 - \dfrac{gt_2^2}{2} = 0$. Откуда получаем два решения: $t_0 = 0$, $t_n = t_2 = \dfrac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$.

Первое выражение соответствует начальному моменту времени, второе – моменту падения на землю и времени полета. Отметим, что время всего движения оказалось в два раза больше времени подъема. Отсюда следует, что время падения от наивысшей точки равно времени подъема к ней и равно половине времени всего полета: $t_{пад} = t_{под} = t_n/2$.

Дальность полета найдём из соотношения (8.8) для координаты $x$:

$$L = x(t_2) = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t_2 = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2\upsilon_0^2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

В последнем действии мы применили тригонометрическую формулу двойного аргумента: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Отметим, что дальность полета является наибольшей при $\sin 2\alpha = 1$, то есть при $\alpha = 45^0$.

Итак, мы получили следующие формулы для характеристик рассматриваемого движения:

$$h_{\max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}; \quad t_{под} = t_{пад} = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}; \quad t_n = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}; \quad L = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Теперь найдем скорость и угол, под которым она направлена, в конце полета. Для этого вновь воспользуемся теоремой Пифагора:

$$\upsilon_к = \sqrt{\left(\upsilon_x(t_2)\right)^2 + \left(\upsilon_y(t_2)\right)^2} = \sqrt{\left(\upsilon_0 \cos\alpha\right)^2 + \left(\upsilon_0 \sin\alpha - g \cdot \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}\right)^2} = \upsilon_0 -$$ то есть

конечная скорость равна начальной, если не учитывать сопротивление среды. Отметим, что при решении задач равенство модулей конечной и начальной скоростей можно не выводить, а использовать, как известный факт.

Тангенс угла наклона скорости определяется выражением: $\mathrm{tg}\beta_к = \frac{\upsilon_y(t_2)}{\upsilon_x(t_2)} = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha - g\cdot\frac{2\upsilon_0\sin\alpha}{g}}{\upsilon_0\cos\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\alpha$ – это значит, что угол между вектором конечной скорости к горизонту равен начальному углу броска, но конечная скорость направлена "вниз", а не "вверх".

Наконец, зададимся вопросом поиска уравнения траектории тела, брошенного под углом к горизонту, то есть уравнения, определяющего связь координат $x$ и $y$ в любой точке траектории. Для этого снова воспользуемся соотношениями, входящими в систему (8.8): выразим $t$ из функции $x(t)$ и подставим в функцию $y(t)$:

$$t = \frac{x}{\upsilon_0\cos\alpha};\;\; y(x) = \cancel{\upsilon_0}\sin\alpha\cdot\frac{x}{\cancel{\upsilon_0}\cos\alpha} - \frac{g}{2}\cdot\left(\frac{x}{\upsilon_0\cos\alpha}\right)^2 = -x^2\cdot\frac{g}{2\upsilon_0^2\cos^2\alpha} + x\cdot\mathrm{tg}\alpha$$

Мы получили уравнение параболы, проходящей через начало координат, ветви которой направлены вниз. Анализируя эту функцию, можно получить уже найденные значения $h_{max}$ и $L$. Предлагаем вам в качестве математической разминки проверить это самостоятельно.

**Пример 8.4.** Под каким углом к горизонту нужно бросить тело с начальной скоростью $\upsilon_0$ с поверхности земли, чтобы оно упало за землю на расстоянии $L$ от начальной точки? Всегда ли это возможно?

*Решение:* Ранее было получено выражение для дальности полета: $L = \frac{\upsilon_0^2\sin 2\alpha}{g}$. Отсюда получаем уравнение (1): $\sin 2\alpha = \frac{gL}{\upsilon_0^2}$. Так как синус – ограниченная функция, получаем условие (2) того, что тело сможет упасть на расстоянии $L$ от точки броска: $\frac{gL}{\upsilon_0^2} \le 1$.

Угол, под которым бросается тело к горизонту, находится в диапазоне: $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, или $0 \le 2\alpha \le \pi$. Тогда уравнение (1) при выполнении условия (2) имеет два решения:

$$2\alpha = \begin{cases} \arcsin\frac{gL}{\upsilon_0^2} & \alpha_1 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{gL}{\upsilon_0^2} \\ \pi - \arcsin\frac{gL}{\upsilon_0^2} & \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{gL}{\upsilon_0^2} \end{cases}$$

В случае $\frac{gL}{\upsilon_0^2}=1$ оба решения совпадают и равны $\alpha=\frac{\pi}{4}$, при этом дальность полета оказывается максимально возможной при заданной скорости.


Рис. 8.6

При $\frac{gL}{\upsilon_0^2}<1$ существует два угла, при которых тело падает на расстоянии $L$ от начальной точки (Рис. 8.6). Траектория, соответствующая меньшему углу ($\alpha_1$), называется *настильной*, а соответствующая большему углу ($\alpha_2$), – *навесной* траекторией.

*Ответ:* 1) При $\frac{gL}{\upsilon_0^2}=1$: $\alpha=\frac{\pi}{4}$;

2) при $\frac{gL}{\upsilon_0^2}<1$: $\alpha_1=\frac{1}{2}\arcsin\frac{gL}{\upsilon_0^2}$, $\alpha_2=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{gL}{\upsilon_0^2}$;

3) при $\frac{gL}{\upsilon_0^2}>1$ – описываемая в условии ситуация невозможна.

**Пример 8.5.** Два маленьких стальных шарика брошены одновременно из одной и той же точки с поверхности земли с начальными скоростями $\upsilon_{01}$ = 5 м/с и $\upsilon_{02}$ = 8 м/с, направленными под углами $\alpha_1$ = 20° и $\alpha_2$ = 80° к горизонту соответственно. Чему равно расстояние между шариками спустя время $t$ = 1/4 с после броска?

*Решение:* Введём систему отсчёта, как показано на рисунке 8.7. Запишем уравнения движения для каждого из шариков согласно (8.8):

$$\begin{cases} x_1(t)=\upsilon_{01}\cos\alpha_1\cdot t \\ y_1(t)=\upsilon_{01}\sin\alpha_1\cdot t-\dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \qquad (1)$$

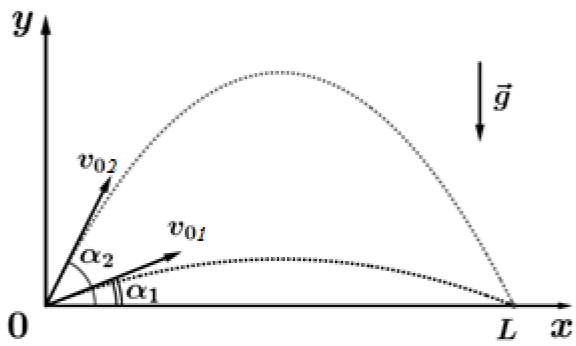



Рис. 8.7

$$\begin{cases} x_2(t)=\upsilon_{02}\cos\alpha_2\cdot t \\ y_2(t)=\upsilon_{02}\sin\alpha_2\cdot t-\dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \qquad (2)$$

Зависимость расстояния от времени между шариками во время полёта в декартовой прямоугольной системе координат можно найти по теореме

Пифагора по формуле (3): $d\left(t\right)=\sqrt{\left(x_2(t)-x_1(t)\right)^2+\left(y_2(t)-y_1(t)\right)^2}$ . Подставляя в выражение (3) соотношения (1) и (2), после преобразований получаем: $d\left(t\right)=t\sqrt{\left(\upsilon_{02}\cos\alpha_2-\upsilon_{01}\cos\alpha_1\right)^2+\left(\upsilon_{02}\sin\alpha_2-\upsilon_{01}\sin\alpha_1\right)^2}$ или, раскрывая скобки и упрощая выражение, приходим к конечному виду: $d\left(t\right)=t\sqrt{\upsilon_{01}^2-2\upsilon_{01}\upsilon_{02}\cos\left(\alpha_2-\alpha_1\right)+\upsilon_{02}^2}$ = 1,75 м. Здесь мы воспользовались формулой для косинуса разности: $\cos\left(\alpha_2-\alpha_1\right)=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\sin\alpha_1\sin\alpha_2$.

*Ответ:* $d\left(t\right)=t\sqrt{\upsilon_{01}^2-2\upsilon_{01}\upsilon_{02}\cos\left(\alpha_2-\alpha_1\right)+\upsilon_{02}^2}$ = 1,75 м.

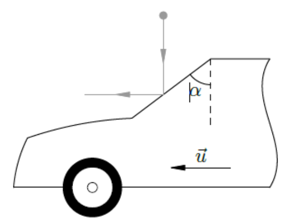
## Задачи для самостоятельного решения

1. Велосипедист ехал из одного города в другой. Половину пути он проехал со скоростью $\upsilon_1$ = 12 км/ч. Далее половину оставшегося времени он ехал со скоростью $\upsilon_2$ = 6 км/ч, а затем до конца пути шёл пешком со скоростью $\upsilon_3 = 4$ км/ч. Определить среднюю скорость велосипедиста на всем пути.

2. Два автобуса выехали с автостанции друг за другом с интервалом времени $\tau_1$ =10 мин и, набрав за одинаковое время скорость $\upsilon_1$= 60км/ч, отправились в другой город. По дороге они обогнали движущегося в том же направлении велосипедиста. Какова скорость велосипедиста $\upsilon_2$, если автобусы проехали мимо него с интервалом времени $\tau_2$ = 15 мин? Ответ приведите в км/ч, округлив до целых.

3. По гладкой горизонтальной поверхности льда скользят в одном направлении брусок со скоростью $U$ = 0,5 м/с и шайба со скоростью $\upsilon$= 2 м/с, догоняющая брусок. Масса бруска намного больше массы шайбы. В некоторый момент шайба находилась в точке В на расстоянии $L$ = 1 м от бруска. После упругого удара о брусок шайба возвратилась в точку В. 1) С какой скоростью относительно льда шайба отскочила от бруска? 2) Через какое время, считая от момента первого прохождения точки В, шайба вернулась в точку В?

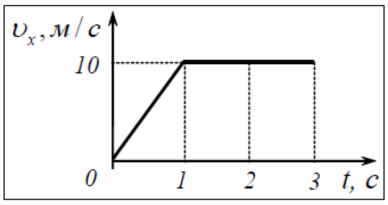
4. Во время града автомобиль едет по горизонтальной дороге со скоростью $u$ = 25 км/ч. Одна из градин ударяется о переднее (ветровое) стекло автомобиля, наклонённое под углом $\alpha = 30°$ к вертикали, и отскакивает горизонтально в направлении движения автомобиля. Считая, что удар градины о стекло абсолютно упругий и что скорость градины непосредственно перед ударом вертикальна, найти скорость градины: 1) до удара; 2) после удара. *(Физтех, 2001)*




5. Тело движется прямолинейно вдоль оси $Ox$. Зависимость координаты тела от времени имеет вид: $x(t) = 12 + 6t - 0{,}5t^2$ (м). Чему равны: начальная координата, начальная скорость и ускорение тела? Определите координату и скорость тела через 3с от момента начала движения.

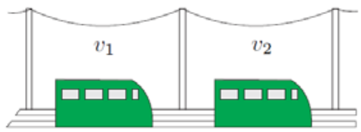
6. За время $t$ = 5 с равноускоренного движения по прямой скорость тела увеличилась в $n$ = 3 раза и оно прошло путь $S$ = 25 м. Определите величину $a$ ускорения тела.

7. Материальная точка движется прямолинейно. График зависимости скорости точки от времени представлен на рисунке. Определите по этому графику среднюю путевую скорость движения материальной точки на первой половине пути.




8. Шарик, скатываясь с прямолинейного наклонного желоба с нулевой начальной скоростью, за первую секунду движения прошёл путь 10 см. Какой путь пройдёт шарик за первые три секунды с момента начала движения?

9. Машинист настроил бортовой компьютер электрички так, чтобы он показывал среднюю скорость $\upsilon$ на участке, пройденном между соседними опорами, поддерживающими контактный провод. Расстояния между любыми двумя соседними опорами одинаковы. Электричка отправляется с платформы «Новодачная» и разгоняется с постоянным ускорением. Через некоторое время машинист увидел, что компьютер показывает скорость $\upsilon_1 = 20$ км/ч. На следующем участке скорость оказалась $\upsilon_2 = 30$ км/ч. Какой была мгновенная скорость $\upsilon_{12}$ электрички на границе между первым и вторым участками? *(ВОШ, Заключительный этап, 2015,9 кл)*




10. Легковой автомобиль движется прямолинейно со скоростью $\upsilon_1$ = 72 км/ч за грузовиком, скорость которого $\upsilon_2$ = 54 км/ч. Когда расстояние между автомобилями составило $L$ = 15 м, легковой автомобиль начал тормозить с ускорением $a$ = 2,5 м/с$^2$ и остановился. Найдите минимальное расстояние $L_{\min}$ между автомобилями при их движении.

11. Два тела, находящихся на одной и той же высоте, брошены одновременно с одинаковыми скоростями $\upsilon_0$ = 10 м/с, одно вертикально вверх, а другое вертикально вниз. Определите, насколько дольше будет падать тело, брошенное вверх.

12. Два шарика брошены одновременно навстречу друг другу с одинаковыми начальными скоростями: один — с поверхности земли вертикально вверх, другой — с высоты $H$ вертикально вниз. Найдите эти скорости, если известно, что шарики встретились на высоте $H$/4. *(ВОШ, Муниципальный этап, 2018,10 кл)*

13. С вершины башни высотой 125 м, бросили мяч в горизонтальном направлении со скоростью $\upsilon_0$ = 20 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите модуль вектора перемещения мяча за четвертую секунду полёта.

14. Суворовец Илья два раза стреляет из снайперской винтовки Драгунова по мишени, которая движется горизонтально ему навстречу со скоростью $u$ = 10 м/с. Скорость пули равна $\upsilon$ = 790 м/с. Длительность времени между выстрелами составляет $\tau$ = 3 с. Расстояние до мишени в момент первого выстрела $l_1$ = 100 м. Найдите расстояние между отверстиями пуль на мишени, если оба раза Илья целится в центр мишени, винтовка и центр мишени находятся на одном уровне. Сопротивление воздуха не учитывать. Ответ выразить в миллиметрах, округлив до целого. Ускорение свободного падения принять равным $g$ = 10 м/с$^2$. *(Всеармейская олимпиада по физике,2 этап, 2017, 9кл)*

15. Камень, брошенный вертикально вверх с поверхности земли, упал на землю через 3с. На каком расстоянии от точки бросания (по горизонтали) упадёт камень на землю, если его бросить с такой же начальной скоростью, но под углом $\alpha$ = 45° к горизонту? Сопротивлением воздуха пренебречь.

16. Под каким углом к горизонту надо бросить тело, чтобы дальность его полёта была втрое больше максимальной высоты его подъёма? Сопротивлением воздуха пренебречь.

17. Камень бросили под углом к горизонту со скоростью $\upsilon_0$ = 8 м/с с крутого берега реки высотой $H$ = 1,8 м. С какой скоростью камень упал в воду? Принять $g$ = 10 м/с$^2$. Сопротивление воздуха не учитывать.

18. Со склона горы с углом наклона $\alpha$ = 60° производится выстрел из миномета. Начальная скорость мины равна $\upsilon_0$ = 80 м/с и направлена перпендикулярно склону. На каком расстоянии от места выстрела произойдет падение мины на склон. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным $g$ =10 м/с$^2$.

19. Два маленьких стальных шарика брошены одновременно из одной и той же точки с поверхности земли с начальными скоростями $\upsilon_{01}$ = 5 м/с и $\upsilon_{02}$ = 8 м/с, направленными под углами $\alpha_1$ = 25° и $\alpha_2$ = 85° к горизонту соответственно. Чему равно расстояние между шариками спустя время $t$ = 1/2 с после броска?